Nr 10, 7 april -05, Amelia 2

10 Beräkning av dubbelintegraler

10.1 Byte av integrationsordning

Exempel 1 *(906) Kasta om integrationsordningen i*

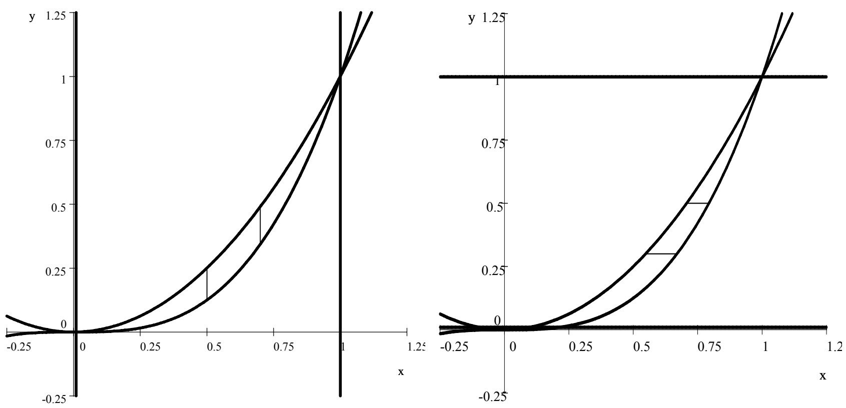
$$
\begin{aligned}
&a) \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy \\
&b) \int_0^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy \\
&c) \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy.
\end{aligned}
$$

Lösning: Med hjälp av figurer framgår de nya gränserna i dessa integraler, efter byte av integrationsordning.

a) Vi skriver ut variablerna i integralens gränser för tydlighets skull:

$$\int_{x=0}^{x=1} dx \int_{y=x^3}^{y=x^2} f(x,y)dy$$

Alltså är kurvorna $y = x^2$, $y = x^3$, $x = 1$ och $x = 0$ gränser för området. Vi ritar ut dessa kurvor. Det ger den vänstra figuren nedan:

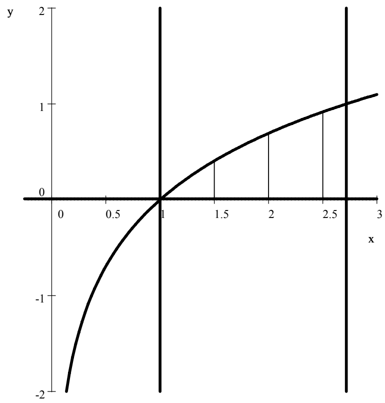


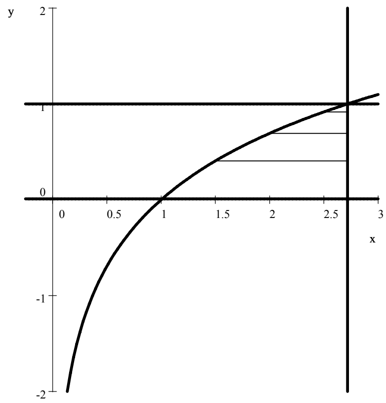
Här är området bergänsat av de två kurvorna x^2 och x^3 i höjdled, alltså i y-led pga $\int_{x^2}^{x^3} ...dy$. Notera att x^3 är den undre kuvan (ty $x^3 < x^2$ om $0 < x < 1$). I sidled (x-led) har vi begränsning i form av de lodräta linjerna $x = 0$ och $x = 1$, pga $\int_0^1 ...dx$. Kvar blir den smala "skäran" i den vänstra figuren, från $y = x^3$ till $y = x^2$.

Om vi istället integerar i sidled så har vi $y$som variabel. Då går vi från den vänstra kurvan $x = \sqrt{y}$ till den högra $x = \sqrt[3]{y}$. Då får vi med precis samma punkter om vi i y-led befinner oss mellan $y = 0$ och $y = 1$. Med dessa gränser täcker vi samma område. Alltså:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^3} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)dx.$$

b) Här har vi $\int_{x=1}^{x=e} dx \int_{y=0}^{y=\ln x} f(x,y)dy$, och kurvorna $x = 1$, $x = e$, $y = 0$ och $y = \ln x$ är ritade i den vänstra figuren nedan:

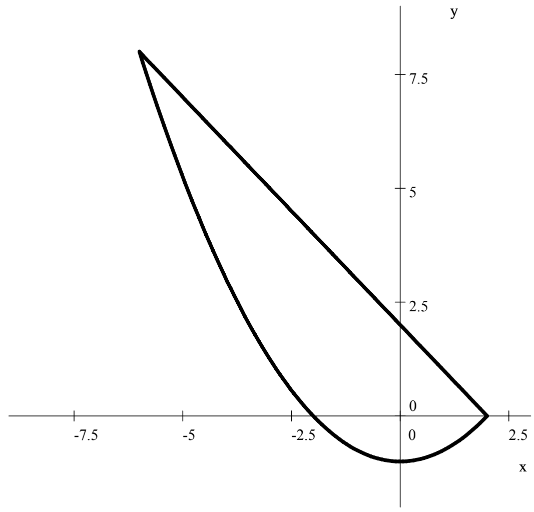




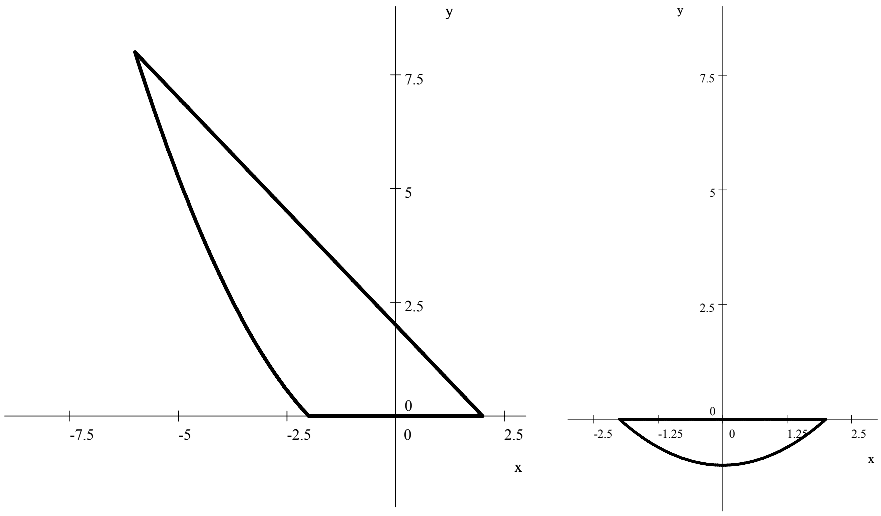
Till höger startar vi istället med kurvan $y = \ln x$, eller $x = e^y$, och slutar med kurvan $x = e$. Då måste y ligga mellan $y = 0$ och $y = 1$. Alltså:

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y)dx.$$

c) I $\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$ är vi mellan $y = \frac{x^2}{4} - 1$ till $y = 2 - x$ och mellan $x = -6$ till $x = 2$. Figuren nedan visar att gränserna i x-led går precis i skärningarna mellan $y = \frac{x^2}{4} - 1$ och $y = 2 - x$, som inträffar i $(-6, 8)$ och $(2, 0)$ (lös ekvationen $\frac{x^2}{4} - 1 = 2 - x$).



Men för att byta integrationsriktning måste vi dela upp området i två delar, genom ett snitt i linjen $y = 0$.



Inverserna till $y = \frac{x^2}{4} - 1$ är $x = \pm 2\sqrt{y-1}$, beroende på område. I den vänstra kan vi då i x-led integrera från $-2\sqrt{y-1}$ till $2 - y$, och

då har vi i y-led begränsningarna $y = 0$ och $y = 8$.

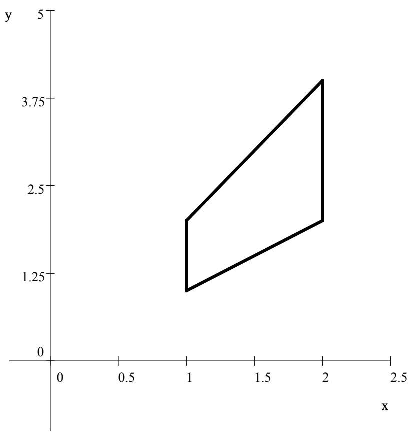
I det högra området kan vi i x-led integrera från $-2\sqrt{y-1}$ till $2\sqrt{y-1}$, och har i y-led begränsningarna $y = -1$ och $y = 0$. Vi får en integral för den vänstra biten plus en integral för den högra:

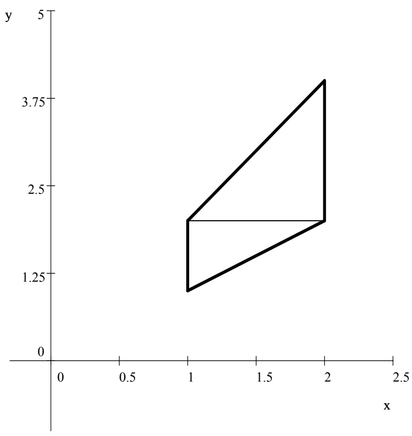
$$\int_{-6}^{0} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy = \int_{0}^{8} dy \int_{-2\sqrt{y-1}}^{2-y} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y-1}}^{2\sqrt{y-1}} f(x,y)dx.$$

10.2 Beräkning av dubbelintegraler

Exempel 2 *(907e) Beräkna* $\iint_D \sqrt{xy}dxdy$ *där* D *är fyrhörningen med hörn i* $(1,1),(2,2),(1,2)$ *och* $(2,4)$.

Om vi delar detta område i två delar enligt den högra figuren nedan kan vi integrera i x-led, ty i y-led är då gränserna konstanter.





Den undre delen D_1 begränsas av $x = 1$ och $x = y$, samt av $y = 1$ och $y = 2$. Den övre D_2 begränsas av $x = y/2$ och $x = 2$ samt av $y = 2$ och $y = 4$. Alltså:

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{xy}dxdy &= \iint_{D_1} \sqrt{xy}dxdy + \iint_{D_2} \sqrt{xy}dxdy \\ &= \int_1^2 dy \int_1^y \sqrt{xy}dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 \sqrt{xy}dx.\end{aligned}$$

Vi löser dem var och en för sig. Först över D_1 :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 dy \int_1^y \sqrt{xy}dx &= \{\sqrt{y} \text{ är en konstant under} \\
x\text{-integrationen}\} &= \int_1^2 \sqrt{y}[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_1^y dy \\
\{\text{insättning av gränser}\} &= \int_1^2 \sqrt{y}(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3})dy \\
&= \int_1^2 (\frac{2}{3}y^2 - \frac{2}{3}\sqrt{y})dy \\
&= [\frac{2}{9}y^3 - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}]_1^2 \\
&= \frac{16}{9} - \frac{8\sqrt{2}}{9} + \frac{2}{9} = 2 - \frac{8\sqrt{2}}{9}.
\end{aligned}$$

Integralen över D_2 blir

$$\begin{aligned}
\int_2^4 dy \int_{y/2}^2 \sqrt{xy}dx &= \int_2^4 \sqrt{y}[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_{y/2}^2 dy \\
\{\text{insättning av gränser}\} &= \int_2^4 \sqrt{y}(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}}y^{\frac{3}{2}})dy \\
&= \int_2^4 (\frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{y} - \frac{1}{3\sqrt{2}}y^2)dy \\
&= [\frac{8\sqrt{2}}{9}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{9\sqrt{2}}y^3]_2^4 \\
&= 4\sqrt{2} - \frac{32}{9}.
\end{aligned}$$

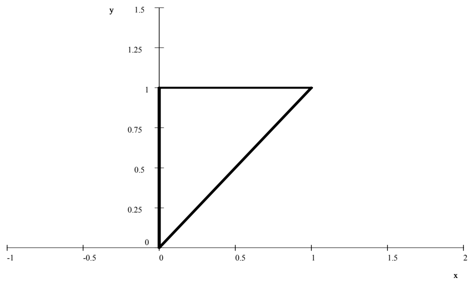
Så

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \sqrt{xy}dxdy &= \iint\limits_{D_1} \sqrt{xy}dxdy + \iint\limits_{D_2} \sqrt{xy}dxdy \\
&= 2 - \frac{8\sqrt{2}}{9} + 4\sqrt{2} - \frac{32}{9} \\
&= \frac{28}{9}\sqrt{2} - \frac{14}{9}.
\end{aligned}$$

Svar: $\frac{28}{9}\sqrt{2} - \frac{14}{9}$.

Exempel 3 *(907f) Beräkna* $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1+y^4}}dxdy$ *om* D *är triangeln med hörnen* $(0,0), (1,1)$ *och* $(0,1)$.

Lösning: Området



begränsas av linjerna $x = 0$, $x = y$ och $y = 1$. Vi kan välja på två itererade integraler:

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1+y^4}} dxdy = \int_0^1 dy \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+y^4}} dx$$

eller (observera gränserna!)

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1+y^4}} dxdy = \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^4}} dy.$$

Integralen $\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^4}} dy$ är inte så lätt att lösa, så vi provar den andra vägen.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dy \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+y^4}} dx &= \{\frac{1}{\sqrt{1+y^4}} \text{ är en konstant} \\
\text{under } x\text{-integrationen}\} &= \int_0^1 [\frac{x}{\sqrt{1+y^4}}]_0^y dy \\
\{\text{insättning av gränser}\} &= \int_0^1 (\frac{y}{\sqrt{1+y^4}} - 0) dy \\
&= \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^4}} dy.
\end{aligned}$$

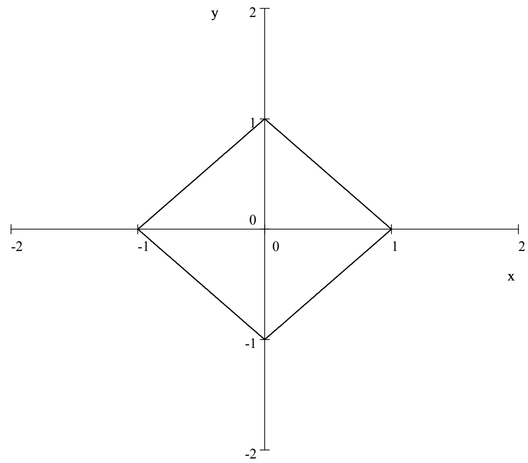
Med substitutionen $y^2 = t$, som ger $2ydy = dt$ och gränserna $t = 0$ och $t = 1$ kan denna intgral lösas:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^4}} dy &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \{\text{standardintegral}\} \\
&= \frac{1}{2}[\ln(t + \sqrt{1+t^2})]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1) \\
&= \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Svar: $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1+y^4}}dxdy = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

Exempel 4 *(907l) Beräkna* $\iint\limits_D (|x|+|y|)dxdy$ *om* $D = \{|x|+|y| \leq 1\}$.

Lösning: Området är här symmetriskt runt origo:



Här räcker det att integrera i första kvadranten ($x \geq 0$ och $y \geq 0$) på grund av integrandens och områdets symmetri. Genom successiva speglingar i x- och y-axeln har att $(x,y) \in D \Leftrightarrow (-x,y) \in D \Leftrightarrow (-x,-y) \in D \Leftrightarrow (x,-y) \in D$ och att $|x|+|y| = |-x|+|y| = |-x|+|-y| = |x|+|-y|$. Av symmetriskäl får vi då

$$\iint\limits_D (|x|+|y|)dxdy = 4\iint\limits_{D_1} (|x|+|y|)dxdy$$

där $D_1 = \{x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. I D_1 är $x \geq 0$ och $y \geq 0$, så $|x|+|y| = x+y$. Då får vi

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (|x|+|y|)dxdy &= 4\iint\limits_{D_1} (x+y)dxdy \\ &= 4\int_0^1 dy \int_0^{1-y} (x+y)dx \\ &= 4\int_0^1 [\frac{1}{2}x^2 + xy]_0^{1-y} dy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\int_0^1 (\frac{1}{2}(1-y)^2 + y - y^2)dy \\
&= 4[-\frac{1}{6}(1-y)^3 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3]_0^1 \\
&= 4(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - (-\frac{1}{6})) = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Svar: $\frac{4}{3}$.

Exempel 5 *(907u) Beräkna* $\iint_D x^3y^2dxdy$ *om* $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösning: Enhetscirkeln $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ kan integreras som $\{-1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ eller som $\{-1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$, vilket svarar mot y-led respektive x-led. Med integranden x^3y^2 är det lämpligt att integrera i x-led först, för då kommer vi att bli av med rötterna efter den första integrationen.

$$
\begin{aligned}
\iint_D x^3y^2dxdy &= \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^3y^2dx \\
&= \int_{-1}^1 [\frac{1}{4}x^4y^2]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dy \\
&= \int_{-1}^1 [\frac{1}{4}(1-y^2)^2y^2 - \frac{1}{4}(1-y^2)^2y^2)dy \\
\int_{-1}^1 0dy &= 0.
\end{aligned}
$$

Vi har en symmetri i området höger-vänster, som svarar mot att integranden byter tecken $(-x)^3y^2 = -x^3y^2$. Därför har vi två bidrag till volymen som skiljs av y-axeln. De är identiska bortsett från att de har olika tecken, varför summan är noll. Denna observation kunde göras genast, i vilket fall kalkyl helt kan undvikas. Observera att vi då både behöver områdets symmetri och integrandens antisymmetri (teckenbyte).

Svar: $\iint_D x^3y^2dxdy = 0$.