Nr 20, 9 maj -05, Amelia 2

20 Integralkalkyl i $\mathbf{R}^3$

VI kommer härnäst att studera integraler av tredimensionella vektorfält: $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$. Vi generaliserar kurvintegraler och Greens formel från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^3$. Vi kommer att studera två typer av integraler på $\mathbf{R}^3$, som i viss mån motsvarar kurvintegraler i planet.

Den ena är kurvintegraler i $\mathbf{R}^3$. Om kurvan är sluten och vektorfältet snällt så kan en sådan kurvintegral omvandlas till en ytintegral på en yta vars kant är kurvan. Detta är Stokes sats, som alltså är en ganska direkt tredimensionell motsvarighet till Greens formel i planet. I det fall vektorfältet är konservativt kan en sådan kurvintegral beräknas mycket enkelt om dess potential är känd $(U(\text{slutpunkt}) - U(\text{startpunkt}))$, just som i $\mathbf{R}^2$.

Den andra typen är en integral av en funktion över alla punkter som ligger på en yta i $\mathbf{R}^3$. Sådana integraler kallas **ytintegraler**. Här är vi intresserade av en vektorfältets komponent vinkelrätt mot ytan, inte tangentiellt. Denna speciella typ av ytintegral kallas en **flödesintegral**. Summeras vektorfältets vinkelräta komponent över ytan kan den beräknas som en dubbelintegral. Är ytan sluten och vektorfältet snällt kan denna ytintegral omvandlas till en trippelintegral över volymen. Det är Gauss sats. För denna integral finns ingen motsvarighet till potentialmetoden. Vi börjar att studera denna senare typ.

20.1 Flödesintegraler

Vi studerar här vektorfält från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^3$, som kan betecknas med $\mathbf{F}(x, y, z)$, med de tre komponenterna P, Q och R, alltså $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, x))$. Vi ska studera fältet inte i hela $\mathbf{R}^3$ utan på en regulär yta i $\mathbf{R}^3$, som ges av en parametrisering med två variabler $\mathbf{r}(u, v)$, ty en yta har två dimensioner (en kurva är endimensionell och har ju *en* parameter).

20.1.1 Normalriktning till en yta

Vi betraktar en reguljär yta $\mathbf{r}(u, v)$, dvs

$$\mathbf{r}: \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{array}$$

som också kan skrivas $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v).y(u, v), z(u, v))$. Parametrarna u och v tillhör mängden $D = \{a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$ (en rektangel i uv-planet).

I varje punkt av ytan finns det en normerad normalriktning $\widehat{n}$. "Normerad" betyder att den har längd 1, dvs $|\widehat{n}| = 1$, "normal" att den är vinkelrät mot ytan. Normalriktningen beror givetvis på punkten, den är funktion av x, y och z, dvs $\widehat{n} = \widehat{n}(x, y, z)$. Vi vet redan att $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ är en normal till ytan i punkten

$\mathbf{r}(u,v)$, dock kanske inte normerad. Normerar vi den har vi alltså en normerad normal:

$$\widehat{n} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}.$$

Vi vill att normalen beror kontinuerligt på punkten på ytan. Således: när vi rubbar punkten ska normalen ändras kontinuerligt (inte plötsligt mycket på en gång). Så är det om ytan är regulär, dvs $\mathbf{r}(u,v)$ har kontinuerliga derivator.

20.1.2 Orienterade ytor

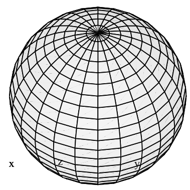
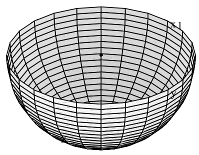
Vi vill också att avbildningen $(u,v) \to \widehat{n}$ ska vara en funktion. Det kräver att ytan är **orienterbar**. Definition av detta begrepp är just att denna avbildning är en funktion. Det betyder geometriskt att ytan har två sidor.

Ett exempel på en reguljär kurva som inte är orienterbar är ett Möbiusband. Tag en pappersremsa och tejpa ihop den till en ring, men vänd först ena änden ett halvt varv. Denna yta har bara en sida. Prova att måla ena sidan röd. Då kommer man att komma över till motsatta sidan så "båda" sidorna blir röda – den har bara en sida. Här är inte avbildningen $(u,v) \to \widehat{n}$ en funktion ty går vi runt ett varv till samma punkt så får avbildningen $\widehat{n}$ motsatt riktning. Det betyder att avbildningen $(u,v) \to \widehat{n}$ inte är väldefinierad.

En orienterbar yta är dessutom **orienterad** när vi bestämt oss för vilken sida normalvektorn pekar åt. Då kan vi tala om en utsida, som är den riktning normalen pekar åt, och en insida, som är den andra.

20.1.3 Slutna ytor

En kropp är en begränsad mängd i $\mathbf{R}^3$ med positiv volym ($\iiint\limits_K dxdydz > 0$). Vanligen begränsas en kropp av reguljära ytor. En **sluten** yta i $\mathbf{R}^3$ är en yta som är begränsningsyta för en kropp. Det är en yta som inte har någon kant. Ett exempel är en sfär ($\{x^2+y^2+z^2=1\}$). En halvsfär (ex.: $\{x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0\}$) är inte någon sluten yta ty den har en kant ($\{x^2+y^2=1, z=0\}$), som är cirkelformad. Om vi lägger till bottenyta till sfären får vi en sluten yta ($\{x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0\} \cup \{x^2+y^2 \leq 1, z=0\}$).

En sfär – en sluten yta. En halvsfär är inte sluten. Den har kant.

På liknande sätt är en öppen cylinder inte sluten, men med ändytor är den sluten. En flaska utan kapsyl är inte sluten, men med kapsyl är den sluten. En sluten yta som innehåller en vätska släpper inte ut den hur den än vrids i rummet. Det gör inte en yta som inte är sluten. Slutenhet är ett grundläggande och naturligt geometriskt begrepp.

En annan definition av sluten yta är att den delar rummet i två delar, på så sätt att om två punkter på var sida av ytan förbinds med en kurva så *måste* kurvan skära ytan någonstans. Är den inte sluten så finns det alltid någon kurva mellan två punkter som inte skär ytan.

"Sluten yta" är ett begrepp som är analogt med "sluten kurva" i planet. Analogt med att lägga till kurvdelar så att en kurva blir sluten, kan man lägga till ytstycken så att en yta blir sluten.

20.1.4 Vektorfält och flöden

Ett **flöde**, av vätska, gas, elektoner eller annat, kan beskrivas med ett vektorfält: $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$. Då anger värdet $\mathbf{F}$ i en punkt (x,y,z) hastighetsvektorn för en partikel i punkten. Vi kommer att studera hur mycket flöde som sker genom en yta. Då bidrar ett flöde som sker parallellt med ytan inte alls till flödet *genom* ytan. Flödets komponent vinkelrätt mot ytan är den del av flödet som vi är intresserade av, och storleken av denna vinkelräta komponent är $\mathbf{F}\cdot\widehat{n}$. Här är $\widehat{n}$ en normerad vektor vinkelrät mot ytan. Allt detta inträffar i en viss punkt (x,y,z) på ytan. När vi lägger ihop flödet i alla punkter får vi en intergral.

Vi har sett att arean av en buktig yta är

$$\iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv$$

där $D = \{a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$ är de tillåtna parametervärdena för den reguljära ytan (för en sfär, exempelvis, har vi $\{0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$). Arean av ett ytelement är således $|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|dudv$, så totala födet genom detta element är

$$\underbrace{\mathbf{F}\cdot\widehat{n}}_{\text{flöde}}\underbrace{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|dudv}_{\text{area}}.$$

Men eftersom

$$\widehat{n} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}$$

får vi flödet

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}'_\mathbf{u} \times \mathbf{r}'_\mathbf{v}}{|\mathbf{r}'_\mathbf{u} \times \mathbf{r}'_\mathbf{v}|}|\mathbf{r}'_\mathbf{u} \times \mathbf{r}'_v|dudv,$$

där vi kan förkorta bort $|\mathbf{r}'_\mathbf{u} \times \mathbf{r}'_v|$. Det ger flödet

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}'_\mathbf{u} \times \mathbf{r}'_\mathbf{v})\ dudv,$$

och summerar vi över hela ytan D har vi

$$\iint\limits_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}'_\mathbf{u} \times \mathbf{r}'_\mathbf{v})\ dudv.$$

Definition 1 ***Flödesintegralen*** *av vektorfältet* $\mathbf{F}$ *över den orienterade ytan* $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, *där* $(u,v) \in D = \{a \le u \le b, c \le v \le d\}$, *är integralen*

$$\iint\limits_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}'_\mathbf{u} \times \mathbf{r}'_\mathbf{v})\ dudv.$$

Liksom en kurvintegral kan en ytintegral skrivas på flera olika sätt. I skrivsättet

$$\iint\limits_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}'_\mathbf{u} \times \mathbf{r}'_\mathbf{v})\ dudv = \iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}\ dS$$

är S ytan utan parameterframställning. Notera att D är ett område i parameterplanet (u,v), området D hör ihop med parameterframställningen. Vidare är $\widehat{n}$ en normerad normal vektor, och dS är ytelementet. På grund av likheten $\widehat{n} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}$, se ovanstående kalkyl, måste ytelementet vara

$$dS{=}|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|dudv.$$

Ibland bakas även normalriktningen in i dS, vilket ger $\mathbf{dS}$, som är ett "vektor-dS". Då har vi

$$\mathbf{dS} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v dudv.$$

Det ger de tre skrivsätten för en flödesintegral:

$$\iint\limits_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}'_\mathbf{u} \times \mathbf{r}'_\mathbf{v})\ dudv = \iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS = \iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}.$$

Observera att efter insättning av en parameterframställning för ytan är integralen en ordinär dubbelintegral över u och v på ett rektangulärt integrationsområde. Om inte ytan skulle vara orienterad skulle den vara obestämd med avseende på tecken, ty om vi byter parameterframställning så vi byter från $\widehat{n}$ till $-\widehat{n}$ så byter integralen tecken.

Vi har beskrivit flödesintegralen i termer av ett massflöde $\mathbf{F}$, men denna definition är en matematisk definition och således oberoende av om de ingående funktionerna representerar massflöden eller något annat.Som nämnts i definitionen kallas den också ofta ytintegral.

20.1.5 Jämförelse med kurvintegraler

Detta kan jämföras med de tre sätten att skriva en kurvintegral,

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}=\int_b^a \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\mathbf{r}'(t)dt=\int_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy),$$

Det mittersta skrivsättet är här definitionen av kurvintegral. Där är en parameterframställning av Γ given, som ger en ordinär enkelintegral att beräkna. Det högra är praktiskt för där anges vektorfältet på ett enkelt sätt. Det vänstra är kortast och praktiskt om man lägger till och drar ifrån kurvdelar.

Vi har två ytterligerare metoder att beräkna en kurvintegral. Om kurvan är sluten och $\mathbf{F}$ väldefinierat överallt innanför området så kan Greens formel användas. Om fältet $\mathbf{F}$ är konservativt har det en potential, och integralen kan beräknas genom att beräkna denna potential ($U(\text{slutpunkt})-U(\text{startpunkt})$).

För en ytintegal finns det en analogi till Greens formel, som vi kommer till i nästa avsnitt. Motsvarigheten kallas Gauss sats eller divergenssatsen.

20.1.6 Yta som är en graf

Om ytan är en graf $z=f(x,y)$ har vi den naturliga parameterframställningen $(x,y,f(x,y))$, ty vi kan då använda x och y som parametrar. Vi har i samband med arean av en buktig yta beräknat $\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y$ i detta fall:

$$\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y=(-f'_x,-f'_y 1).$$

Den naturliga parameterframställningen ger tydligen en uppåtriktad normal på ytan, eftersom z-komponenten av normalen $\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y$ är 1.

Med $\mathbf{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ blir då ytintegralens skalärpodukt

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y &= (P,Q,R)\cdot(-f'_x,-f'_y 1)\\ &= -Pf'_x-Qf'_y+R.\end{aligned}$$

Då har vi således, med insättning av $z=f(x,y)$ som gäller på ytan:

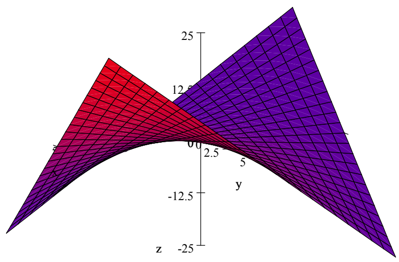
$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS}=\iint_D(-P(x,y,f(x,y))f'_x-Q(x,y,f(x,y))f'_y+R(x,y,f(x,y)))dxdy.$$

Detta är en form av ytintegralen som kan användas när ytan är en funktionsgraf, och då ytans normalriktning är i positiv z-led.

20.2 Flödesintegraler – lösta exempel

Exempel 2 *(1101d) Bestäm flödesintegralen till vektorfältet* $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 2y+2z)$ *över den del av ytan* $z = xy$ *som svarar mot* $0 \le x \le 1$ *och* $0 \le y \le 1$. *Ytans orientering bestäms av att normalen har positiv* z*-komponent.*

Lösning: Här är ytan en graf $f(x, y) = xy$, så vi har en naturlig parameterframställning för ytan: (x, y, xy), med $0 \le x \le 1$ och $0 \le y \le 1$.



Ytan (x, y, xy), då $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

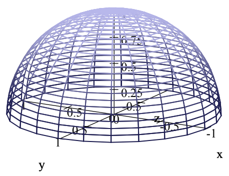
Insättning av $z = xy$, som gäller på ytan, ger vektorfältets värden $\mathbf{F}(x, y, xy) = (x, y, 2y + 2xy)$ just på ytan. Vi har också $f'_x = y$ och $f'_y = x$. Så:

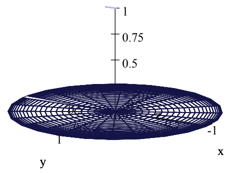
$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} &= \iint_D (-Pf'_x - Qf'_y + R)dxdy \\
&= \iint_D (-x \cdot y - y \cdot x + 2y + 2xy)dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 2ydxdy = 2 \cdot 1[\frac{y^2}{2}]_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

Svar: $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = 1.$

Exempel 3 *(1102b) Bestäm ytintegralen till vektorfältet* $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 0, 0)$ *ut ur halvklotet* $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $z \ge 0$.

Lösning: Ytan S är här halvklotets yta, dvs den buktiga ytan S_1 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$ tillsammans med den plana ytan S_2 $z \ge 0$, $x^2 + y^2 \le 1$.





Ytan S_1. Ytan S_2.

Vi har alltså

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \iint\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} + \iint\limits_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS},$$

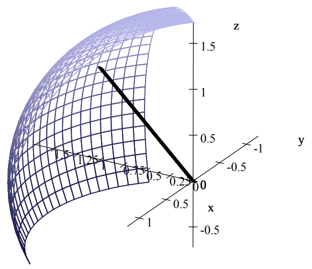
analogt med hur vi kunde dela upp kurvintegraler i olika integraler för olika kurvstycken.

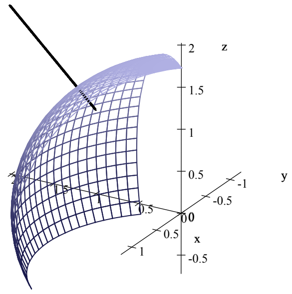
På S_1 har vi en parametrisering med sfäriska koordinater med $r = 1$. Dvs

$$x = \cos\varphi\sin\theta$$
$$y = \sin\varphi\sin\theta$$
$$z = \cos\theta.$$

Volymelementet med sfäriska koordinater är $r^2\sin\theta d\theta d\varphi$, så med $r = 1$ får vi ytelementet $dS = \sin\theta d\theta d\varphi$ (faktorn $\sin\theta$ kan också beräknas med $|\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_\theta|$). Normerad normalriktning i en punkt på en sfärisk yta är en riktning från origo med längden 1. Det betyder att $\widehat{n}$ är samma vektor som ortsvektorn till en punkt på ytan:

$$\widehat{n} = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta).$$





Ortsvektor till (x, y, z). Normal i (x, y, z) – samma vektor!

Vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 0, 0)$ tar på denna yta värdena $\mathbf{F} = (\cos\varphi \sin\theta, 0, 0)$ (insättning av $x = \cos\varphi\sin\theta$). Eftersom vi har ett halvklot har θ övre gränsen $\frac{\pi}{2}$. Vi får då

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \underbrace{(\cos\varphi\sin\theta, 0, 0)}_{\mathbf{F}} \cdot \underbrace{(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)}_{\widehat{n}} \underbrace{\sin\theta d\theta d\varphi}_{dS} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\sin^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi = \{\text{en vanlig dubbelintegral}\} \\
\{\text{trig. formler}\} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi) d\varphi \\
&= \frac{1}{2}[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} [\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}(0+1-\frac{1}{3})2\pi = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Vi beräknar härnäst kurvintegralen över S_2. Här har vi normal $-\widehat{z} = (0, 0, -1)$. Minustecknet på grund av att normalen ska vara utåtriktad från halvklotets inre. På denna del av begränsningsytan betyder det en nedåtriktad normal. Detta är denna ytas orientering.

En parametrisering av cirkeln har vi i polära koordinater och $z = 0$, dvs $(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$. Vektorfältet i dessa punkter är

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(x, y, z) &= (x, 0, 0) \\
\{\text{sätt in parametriseringen}\} &= (r\cos\theta, 0, 0).
\end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}\cdot\widehat{n} &= (r\cos\theta, 0, 0)\cdot(0, 0, -1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Här har fältet $(r\cos\theta, 0, 0)$ endast en komponent i x-riktningen, som är ortogonal mot ytans normalriktning $(0, 0, -1)$. Då har vi inget flöde genom ytan, vilket motsvaras av att integranden $\mathbf{F}\cdot\widehat{n}$ är noll. Alltså:

$$\iint\limits_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \mathbf{0}.$$

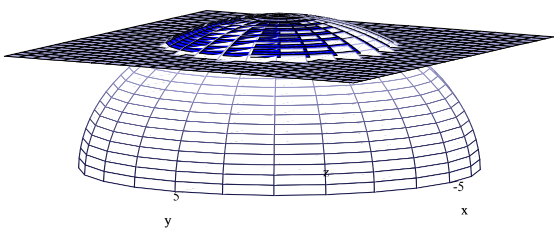
Det ger

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} &= \iint\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} + \iint\limits_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} \\ &= \frac{2\pi}{3} + 0 = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

Svar: $\iint\limits_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \frac{2\pi}{3}$.

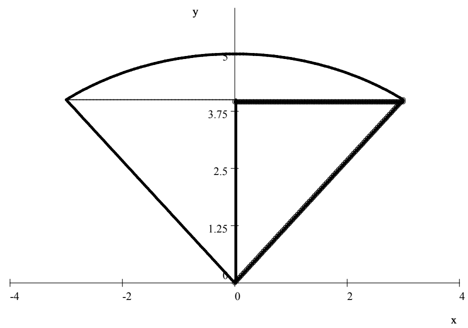
Exempel 4 *(1101e) Bestäm ytintegralen till vektorfältet* $\mathbf{F}(x, y, z) = grad\frac{1}{r}$ *genom ytan* S *given av* $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z \geq 4$, *med normal som bildar spetsig vinkel med* z*-axeln.*

Lösning: Sätter vi in $z = 4$ i ekvationen får vi skärningskurvan mellan de två ytorna.



Planet $z = 4$ och kalotten som är ytan S.

Det är $x^2 + y^2 + 4^2 = 25$, dvs $x^2 + y^2 = 9$.



Vi har en $3, 4, 5$ -triangel i skärningen med yz-planet.

Då kan ytan beskrivas med polära koordinater, med största θ-vinkel $\arctan \frac{3}{4}$. Polära koordinater ger här $(5\cos\varphi\sin\theta, 5\sin\varphi\sin\theta, 5\cos\theta)$, ty radien är 5.

Vi har

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}\frac{1}{r} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \ldots\right) = \{\text{p.s.s. i } y \text{ och } z\} \\
&= -\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right).
\end{aligned}
$$

På ytan har vi $x^2+y^2+z^2 = 25$, så $(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} = (25)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25}^3 = 5^3 = 125$. På ytan har då vektorfältet värdena

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}\frac{1}{r} &= -\frac{(x,y,z)}{125} \\
&= -\frac{(5\cos\varphi\sin\theta, 5\sin\varphi\sin\theta, 5\cos\theta)}{125} \\
&= -\frac{1}{25}(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta).
\end{aligned}
$$

Skalärprodukten i flödesintegralen är då

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{25}(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)\cdot(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta) \\
= & -\frac{1}{25}.
\end{aligned}
$$

Normerad normal i punkten $(5\cos\varphi\sin\theta, 5\sin\varphi\sin\theta, 5\cos\theta)$ är $(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$, och ytelementet är $dS = 25\sin\theta d\theta d\varphi$, ty $r = 5$. Så flödesintegralen är

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} &= \iint\limits_S (-\frac{1}{25})25\sin\theta d\varphi d\theta \\
&= [\cos\theta]_0^{\arctan\frac{3}{4}} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi(\cos(\arctan\frac{3}{4}) - 1) \\
\{\cos(\arctan\frac{3}{4}) \text{ är } \frac{4}{5}\} &= 2\pi(\frac{4}{5} - 1) = -\frac{2\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Här är $\arctan\frac{3}{4}$ vinkeln i en rätvinklig triangel med katetrar 3 och 4. Då är hypotenusan 5, så cosinus för vinkeln är $\frac{4}{5}$. Således: $\cos(\arctan\frac{3}{4}) = \frac{4}{5}$.

Svar: $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = -\frac{2\pi}{5}$.