Nr 17, 25 april -05, Amelia 2

17 Linjeintegraler

17.1 Idéer och sammanhang

I en enkelintegral summeras värdena av en funktion av en variabel $f(x)$ längs ett visst intervall. I en dubbelintegral summeras värdena av en funktion av två variabler $f(x, y)$ över en specifik yta i planet. I en trippenintegral summeras värdena av en funktion av tre variabler $f(x, y, z)$ över ett visst tredimensionellt område i rummet.

I en **linjeintegral**, som även kallas en **kurvintegral**, summeras värdena av en funktion av två variabler $f(x, y)$ som funktionen tar på en viss *kurva* i planet. En linjeintegral kan även vara tredimensionell. Då summeras värdena av en funktion av tre variabler $f(x, y, z)$ längs en kurva i rummet. En tolkning av linjeintegral som skissas i nästa avsnitt är vilket arbete som utförs av ett kraftfält i rummet då en partikel färdas genom det längs en viss kurva.

Det finns många olika sorters kurvintegraler. Vi kommer här att lägga tyngdpunkten på den typ som är vanligast i fysikaliska tillämpningar. Då summerar vi värdena av ett vektorfält i kurvans tangentriktning, vilket svarar mot beräkning av arbete.

Värdet av en kurvintegral bestäms alltså av funktionen $f(x, y, z)$ och av kurvan. Den beräknas som en enkelintegral, där kurvans parameterframställning $(x(t), y(t), z(t))$ sätts in i funktionens variabler $f(x(t), y(t), z(t))$. Denna insättning ger just funktionens värden på kurvan, och inte utanför den. Funktionens värden utanför kurvan är alltså helt ointressanta för kurvintegralens värde.

17.2 Arbete, energi och linjeintegraler

En fysikalisk grundprincip är att arbetet är kraften gånger vägen. Då syftas på "arbete" i en specifik fysikalisk mening. En person som knuffar en järvägsvagn utan att den flyttar på sig utför inget fysikaliskt arbete, men ett antagligen ganska stort fysiologiskt arbete genom att pulsen går upp och kroppslig energi förbrukas i musklernas arbete.

17.3 Kraftfält

Tyngdkraftfältet runt en (stor) massa i origo är

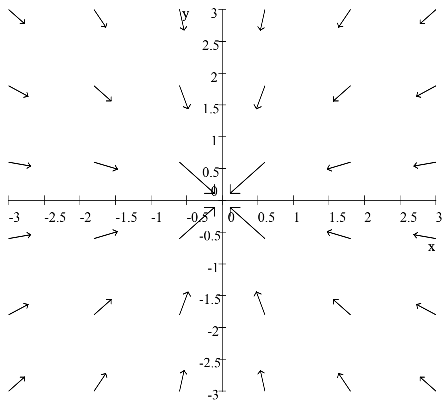
$$\mathbf{F}(x, y, z) = C \frac{-(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

för någon konstant C, som beror på massans storlek och vilka enheter vi väljer. Detta kraftfält är inte helt realistiskt (även om fysikerna låtsas som ingenting) eftersom vi i centrum skulle få oändliga krafter. Fältet är en bra uppskattning långt från kroppen, men inte nära. På jorden är detta en ganska bra uppskattning, med en viss jordkaraktäristisk konstant C, men så fort man kommer under jordytan minskar gravitationen, Då har vi massa på båda sidor, som balanserar varandra. I jordens centrum är givetvis gravitationen från jorden noll – massans gravitation i alla riktningar balanserar varandra. Så gravitationen från jorden är maximal på jordytan. Den är lägre på både högre och lägre höjder.

Kraftfältet betyder att om en (liten) massa placeras i punkten (x, y, z), så kommer den att utsättas för kraften $m\mathbf{F}$. Alltså:

$$Cm\frac{-(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Det är alltså en kraft som är riktad mot origo, ty partikels position är (x, y, z) och kraftens riktning $-(x, y, z)$. Kraften ökar tydligen ju närmare origo vi kommer, ty då får vi nästan noll i nämnaren. I xy-planet har kraftfältet följande utseende:$[x, y]$



Vektorfältet $-(x, y)/(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$.

Men varför har vi exponenten $\frac{3}{2}$ i nämnaren? Jo, gravitationskraften mellan två partiklar avtar som kvadraten på avståndet. Antag, för att undersöka om exponenten $\frac{3}{2}$ är den rätta, att vi har partikeln i punkten $(x, 0, 0)$. Då har vi enligt formel ovan kraften

$$Cm\frac{-(x,0,0)}{(x^2+0^2+0^2)^{\frac{3}{2}}} = -Cm\frac{x}{x^3} = -Cm\frac{1}{x^2}.$$

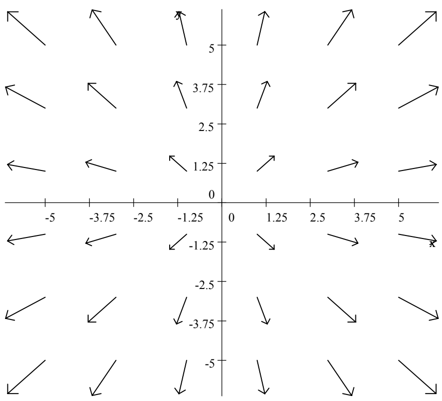
Vi har alltså det rätta beroendet. Om man sätter in sfäriska koordinater får vi

$$\begin{aligned} Cm\frac{-(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} &= Cm\frac{-r(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta)}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -Cm\frac{1}{r^2}(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta). \end{aligned}$$

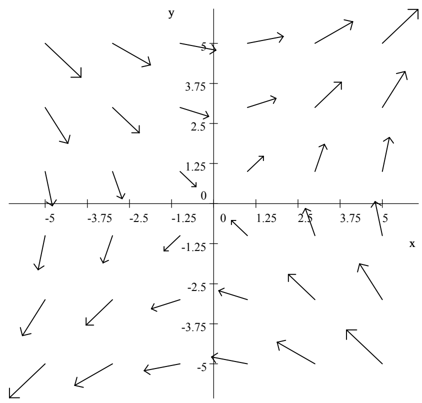
Även på detta sätt kan man se att kraften avtar med kvadraten på avståndet ($\frac{1}{r^2}$), ty vektorn $(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$ anger en riktning oberoende av avstånd till origo.

17.4 Vektorfält

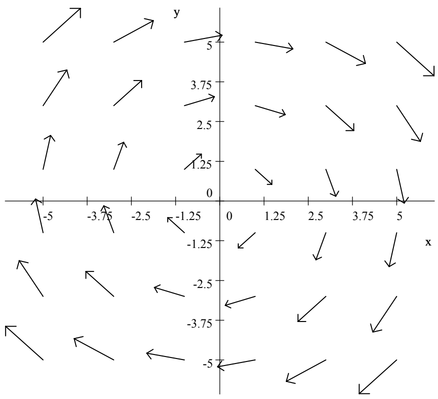
Ett kraftfält är en funktion från $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, eller en funktion från $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Sådana funktioner har vi redan behövt som variabelsubstiutioner i integraler, men spelar alltså också en roll som kraftfält. De följande vektorfälten är några av de enklast tänkbara, och illustrerar något vad vektorfält kan modellera.



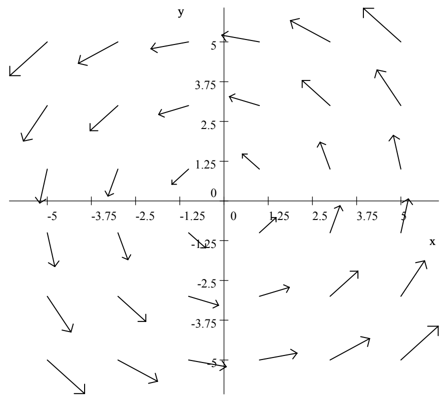
Vektorfältet (x, y).



Vektorfältet (y, x).



Vektorfältet $(y, -x)$.



Vektorfältet $(-y, x)$.

Vektorfältet $(y, -x)$ är en rotation eftersom riktningen i punkten (x, y) är ortogonal mot en ortsvektor från origo (en sådan är vektorn (x, y)):

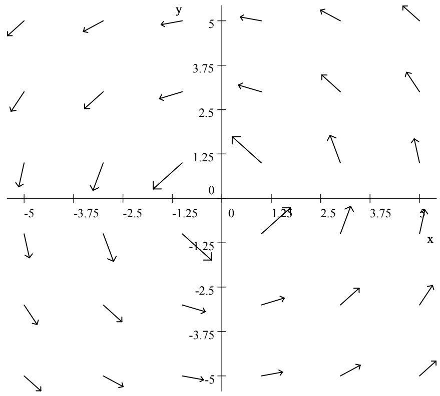
$$(y, -x) \cdot (x, y) = yx - xy = 0.$$

Två vektorer är som bekant ortogonala om dess skalärprodukt är noll. Det är ett mycket praktiskt räknemässigt villkor på ortogonalitet.

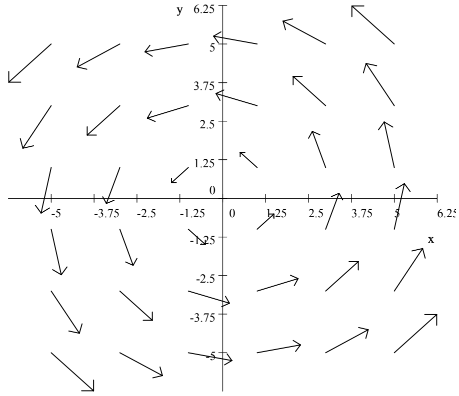
Detta vektorfält är alltså en avbildning från (x, y) till $(y, -x)$. Denna kan också beskrivas med en matris. Avbildningen sker då från $\binom{x}{y}$ till $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \binom{x}{y} =$

$\{\text{matrismultiplikation}\} = \binom{y}{-x}$. Matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ karaktäriserar detta vektorfält, vilket beror på att det är en linjär avbildning. Det är en speciell grupp av vektorfält.

Vektorfältet $(-y, x)$ är en rotation åt andra hållet – i positiv led. Vi har fortfarande en rotation om vi ändrar det radiella beroendet, som synes i de följande två exemplen:



Vektorfältet $\frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$.



Vektorfältet $(-y, x)(x^2 + y^2)$.

17.5 Kraftkomponent i kurvans tangentriktning

Man kan tänka sig kurvan som ett järnvägsspår och kraften drar en järnvägsvagn på spåret. Då kommer bara den komponent av kraften som är i spårets riktning att påverka rörelsen. Kraft som verkar vinkelrätt mot spåret ger inte upphov till någon rörelse, och därmed inte något arbete. En kurva med parameterframställningen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ har som bekant tangentriktningen $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ i den punkt som svarar mot parametervärdet t, nämligen i punkten $(x(t), y(t), z(t))$. Normerar vi denna tangentvektor får vi $\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ (en vektor har längden 1 om den divideras med sin norm). Skalärprodukten med en enhetsvektor ger längden på komponenten i denna riktningen, så kraftkomponenten i järnvägsspårets tangentriktning är

$$\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

Detta är en funktion av en variabel (inte fler), nämligen variabeln t.

Antag att variabeln genomlöper ett parameterintervall $[a, b]$. Båglängden av kurvan är då som bekant

$$\int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt \leftarrow \sum_{k=1}^{n} |\mathbf{r}'(t_k)| \frac{b-a}{n}.$$

Till höger har vi antytt en Riemannsumma som konvergerar mot båglängdsintegralen. Längden av kurvan från t_k till t_{k+1} är alltså nära $|\mathbf{r}'(t_k)| \frac{b-a}{n}$ om n är stort. Arbetet är som nämnts kraften gånger vägen, vilket på en bit av kurvan ger

$$\underbrace{\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}}_{\text{kraften}} \underbrace{|\mathbf{r}'(t)| dt}_{\text{vägen}}.$$

Här kan vi förkorta $|\mathbf{r}'(t_k)|$. Genom att integrera längs hela kurvan får vi hela arbetet, vilket alltså blir

$$\int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Detta är den viktigaste typen av kurvintegral. Här är den skriven med en parameterframställning av kurvan. Den kan också skrivas utan parameterframställning. Om vi kallar kurvan Γ skriver man

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Storheten $\mathbf{dr}$ kan skrivas på fyra sätt, vilka givetvis betyder samma sak:

$$\mathbf{dr} = \mathbf{r}'(t) dt = (x'(t), y'(t), z'(t)) dt = (dx, dy, dz).$$

Skalärprodukten $\mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ är givetvis $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$.

17.6 Orienterade kurvor

En kurva är en mängd punkter i planet given av tre kontinuerligt deriverbara funktioner: $\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]\}$. Deriverbarheten behövs för att tangenten $\mathbf{r}'(t)$ ska existera. Men i en kurvintegral behöver vi en **orienterad kurva** – där genomloppsriktningen är specificerad. Definitionen $\{(x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]\}$ säger inget om genomloppsriktningen. Detta har att göra med att arbetet har ombytt tecken om vi genomlöper kurvan i motsatt riktning. I en orienterad kurva specificeras startpunkten: $\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b], t = a$ är startpunkt$\}$. Detta är konsistent med att en enkelintegral byter tecken om intervallgränserna byts:

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$$

Den orienterade kurvan $\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b], t = a$ är startpunkt$\}$ där genomloppsriktningen är omvänd beteckar vi med $-\Gamma$. Bi betecknar alltså på följande sätt: $-\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b], t = b$ är startpunkt$\}$. Då har vi

$$\int_{-\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = -\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}.$$

Denna regel är som nämnts en nödvändighet på grund av att vi har definierat kurvintegralen som enkelintegralen $\int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \mathbf{r}'(t) dt$, ty

$$\begin{aligned}
\int_{-\Gamma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} &= \int_b^a \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt \\
&= -\int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt \\
&= -\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}.
\end{aligned}$$

17.7 Summor av kurvor

Om vi har två orienterade kurvor Γ_1 och Γ_2, där slutpunkten för Γ_1 är samma punkt som startpunkten för Γ_2, så kan vi tala om de två kurvorna som en sammanhängande kurva, vilken brukar betecknas med $\Gamma_1+\Gamma_2$. Låt oss använda parameterintervallen $[a,b]$ respektive $[b,c]$. Beteckningen $\Gamma_1+\Gamma_2$ för Γ_1 följt av Γ_2 är naturlig eftersom

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}+\int_{\Gamma_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt \\
&\quad +\int_b^c \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt \\
\{\text{slå ihop integrerna}\} &= \int_a^c \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt \\
&= \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}.
\end{aligned}$$

Beteckningen $\Gamma_1+\Gamma_2$ kan alltså motiveras av att

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_b^c f(x)dx$$

gäller för enkelintegraler, och att kurvintegralen är definierad som en enkelintegral.

17.8 Tre sätt att skriva en kurvintegral

Vi har nu sett två sätt att skriva en kurvintegral: $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ (utan parameterframställning för Γ) och $\int_b^a \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\mathbf{r}'(t)dt$ (med parameterframställning av $\boldsymbol{\Gamma}$). Det finns ett tredje sätt. Om vi betecknar vektorfältets tre komponenter med $P(x,y,z),Q(x,y,z)$ och $R(x,y,z)$, alltså

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

så kan vi utföra skalärprodukten $\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} &= (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\cdot(dx,dy,dz) \\
&= P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz.
\end{aligned}$$

Detta ger ett tredje skrivsätt för en kurvintegral – ett andra sätt utan parameterframställning för kurvan:

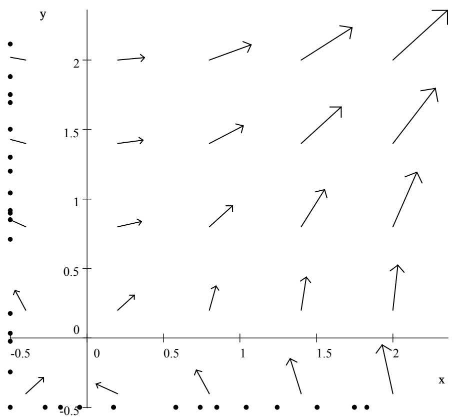
$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Ett tvådimentionellt vektorfält $\mathbf{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ kan betraktas som ett tredimensionellt där z-komponenten är noll, $R(x,y)=0$ och där P och Q är oberoende av variabeln z. Alltså: $\mathbf{F}(x,y,z)=(P(x,y),Q(x,y),0)$. Då får vi i integralen ovan $R(x,y)dz = 0dz = 0$, så

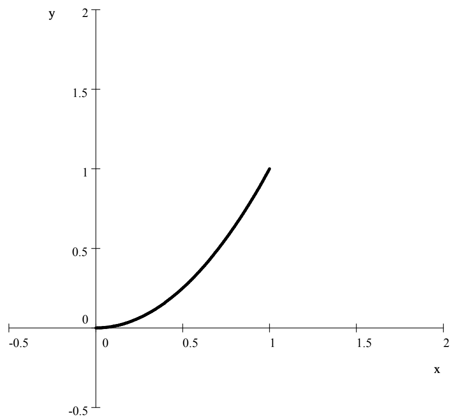
$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} &= \int_b^a \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\mathbf{r}'(t)dt \\ &= \int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy.\end{aligned}$$

Exempel 1 *(1001) Beräkna kurvintegralen* $\int_\Gamma yxdx + x^2dy$ *där* Γ *är kurvan från* $(0,0)$ *till* $(1,1)$ *längs* $y=x^2$.

Lösning: Vi har här vektorfältet $\mathbf{F}(x,y)=(yx,x^2)$ som ska integreras på en bit av parabeln $y=x^2$.



Vektorfältet (xy,x^2).



Parabel $y=x^2$ från $(0,0)$ till $(1,1)$.

Man kan observera i figuren att integralen borde vara positiv, ty vektorfältets riktning i punkter på kurvan tycks ha positiv skalärprodukt med en tangent på kurvan om kurvan genomlöps från origo till $(1,1)$. Om resultatet är negativt är det då ett orimligt resultat.

Vi använder parameterframställningen $(x(t),y(t))=(t,t^2)$, $t\in[0,1]$, där $t=0$ är startpunkt, för den orienterade kurvan Γ. Vi ska beräkna

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_0^1 \mathbf{F}(x(t),y(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt.$$

Vi får först beräkna integranden $\mathbf{F}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$. Insättning av parameterframställningen $(x(t), y(t)) = (t, t^2)$ ger

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y) &= \mathbf{F}(t, t^2)) = \{\text{sätt in i } (yx, x^2)\} \\ &= (t^2 t, t^2) = (t^3, t^2).\end{aligned}$$

Kurvan $(x(t), y(t)) = (t, t^2)$ har tangentvektorn $(x'(t), y'(t)) = (1, 2t)$. Så vi får

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t) &= (t^3, t^2) \cdot (1, 2t) \\ &= t^3 + t^2 2t = 3t^3.\end{aligned}$$

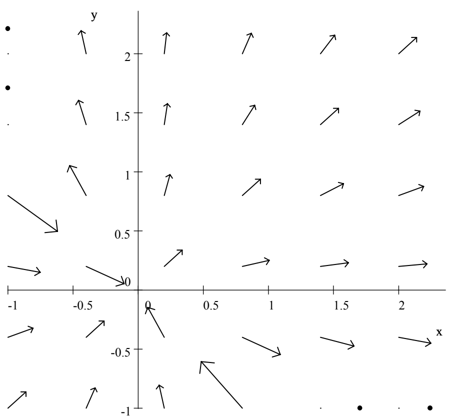
Så med gränserna $t = 0$ och $t = 1$ får vi följande ytterst enkla enkelintegral:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma yxdx + x^2 dy &= \int_0^1 3t^3 dt \\ &= 3[\frac{t^4}{4}]_0^1 = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

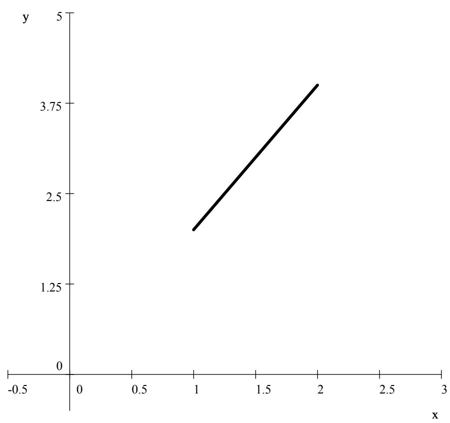
Svar: $\int_\Gamma yxdx + x^2 dy = \frac{3}{4}$.

Exempel 2 *(1003) Beräkna* $\int_\Gamma \frac{xdx+ydy}{x+y}$ *längs* $y = 2x$ *från* $(1, 2)$ *till* $(2, 4)$.

Lösning: Vi har här vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = (\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y})$ som ska integreras på en bit av parabeln $y = x^2$.



Vektorfältet $(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y})$.



Rät linje från $(1, 2)$ till $(2, 4)$.

Detta vektorfält är odefinierat (noll i nämnaren) då $y = -x$. Det är inget problem eftersom kurvan inte är i närheten av denna linje. Med parameterframställningen $\mathbf{r}(t) = (x(t), (y(t)) = (t, 2t)$ får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t, 2t) &= (\frac{t}{t + 2t}, \frac{2t}{t + 2t}) \\ &= (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}).\end{aligned}$$

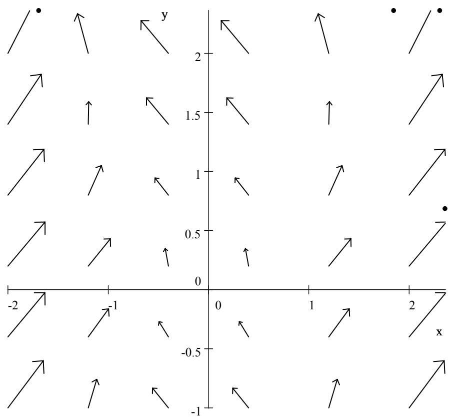
Vi har tangentvektor $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), (y'(t)) = (1, 2)$. Integranden blir $\mathbf{F}(t, 2t) \cdot \mathbf{r}'(t) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cdot (1, 2) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$.

$$\int_\Gamma \frac{xdx + ydy}{x + y} = \int_1^2 \frac{5}{3} dt = \frac{5}{3}.$$

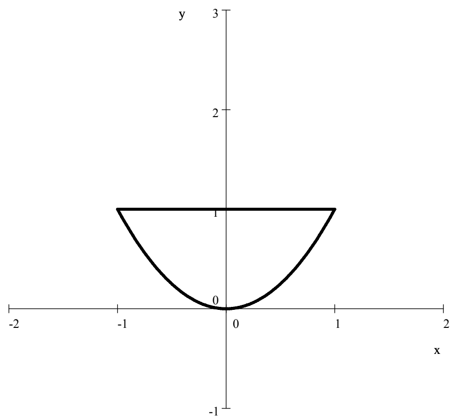
Svar: $\int_\Gamma \frac{xdx+ydy}{x+y} = \frac{5}{3}$.

Exempel 3 *(1007) Beräkna* $\int_\Gamma (x^4 - y^2)dx + (x^4 + y^2)dy$ *längs* $y = x^2$ *från* $(-1, 1)$ *till* $(1, 1)$ *och linjen* $y = 1$ *från* $(1, 1)$ *till* $(-1, 1)$.

Lösning: Vi har vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = (x^4 - y^2, x^4 + y^2)$. Låt Γ_1 vara $y = x^2$, med parameterframställning (t, t^2) och parameterintervall $[-1, 1]$ och startvärde $t = -1$, medan Γ_2 är $y = 1$, med parameterframställning $(t, 1)$ och parameterintervall $[-1, 1]$ och startvärde $t = 1$.



Vektorfältet $(x^4 - y^2, x^4 + y^2)$.



Två kurvor som bildar en sluten kurva.

På Γ_1, med parameterframställning (t, t^2) får vi,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y) &= (x^4 - y^2, x^4 + y^2) \\ &= (t^4 - t^4, t^4 + t^4) = (0, 2t^4). \end{aligned}$$

Vi har tangent $(1, 2t)$, så

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{r}'(t) &= (0, 2t^4) \cdot (1, 2t) \\ &= 0 + 4t^5. \end{aligned}$$

Vi får

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} (x^4 - y^2)dx + (x^4 + y^2)dy &= \int_{-1}^{1} 4t^5 dt \\
&= 4[\frac{t^6}{6}]_{-1}^{1} = 0.
\end{aligned}
$$

På den andra kurvdelen, Γ_2, som har parameterframställning $(t, 1)$, får vi,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}(x, y) &= (x^4 - y^2, x^4 + y^2) \\
&= (t^4 - 1, t^4 + 1).
\end{aligned}
$$

Vi har här tangent $(1, 0)$ (derivatan av $(t, 1)$, komponentvis), så

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{r}'(t) &= (t^4 - 1, t^4 + 1) \cdot (1, 0) \\
&= t^4 - 1.
\end{aligned}
$$

Insättning ger följande värde av kurvintegralen på Γ_2. Observera att integrationsgränserna är omkastade, ty vi startar i $t = -1$ och slutar i $t = 1$.

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_2} (x^4 - y^2)dx + (x^4 + y^2)dy &= \int_{1}^{-1} (t^4 - 1)dt \\
\{\text{kasta tillbaka gränserna}\} &= [t - \frac{t^5}{5}]_{-1}^{1} = \frac{8}{5}.
\end{aligned}
$$

Således:

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (x^4 - y^2)dx + (x^4 + y^2)dy &= \int_{\Gamma_1} (x^4 - y^2)dx + (x^4 + y^2)dy \\
&\quad + \int_{\Gamma_2} (x^4 - y^2)dx + (x^4 + y^2)dy \\
&= 0 + \frac{8}{5} = \frac{8}{5}.
\end{aligned}
$$

Svar: $\int_\Gamma (x^4 - y^2)dx + (x^4 + y^2)dy = \frac{8}{5}$.