Nr 18, 26 april -05, Amelia 2

18 Kurvintegraler – Greens formel och potential

18.1 Greens formel

Vi studerar i detta avsnitt kurvor i planet, i $\mathbf{R}^2$.

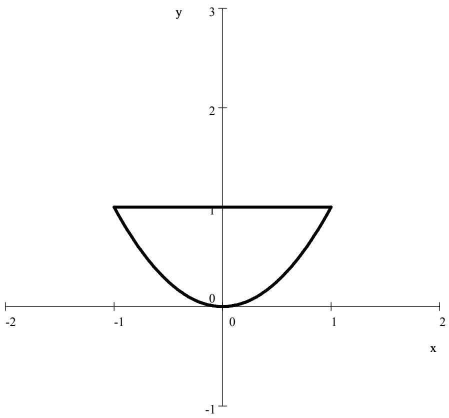
En kurvintegral är som vi sett en integral på en kurva i planet. Det generaliserar enkelintegralbegreppet, som kan ses som en kurvintegral på ett intervall på x-axeln av en funktion som är oberoende av y.

Vi ska härnäst konstruera ett sätt att beräkna en kurvintegral över ett vektorfält $(P(x,y), Q(x,y))$ som en dubbelintegral – Greens formel.

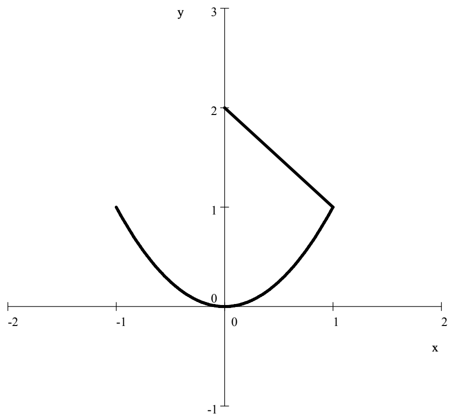
Vi har sett att man vid itererad integration av en dubbelintegral vid den första integrationen går från en dubbelintegral till en enkelintegral. Med Greens formel går man från en enkelintegral till en dubbelintegral. Greens formel är en sorts "baklänges itererad integration". Beviset av Greens formel består just av detta. Endast vissa kurvor definierar ett integrationsområde för en dubbelintegral i planet. Vi specificerar härnäst sådana kurvor.

18.1.1 Kurvor i planet

En orienterad kurva $\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in [a,b], t = a$ är startpunkt$\}$ är en **sluten kurva** om startpunkt och slutpunkt är samma punkt, dvs $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. En sluten kurva kan mycket väl bestå av flera delkurvor.

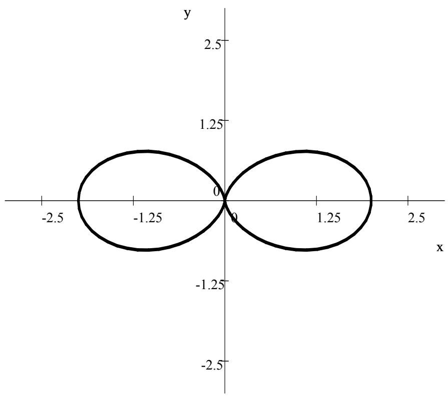


En sluten kurva.

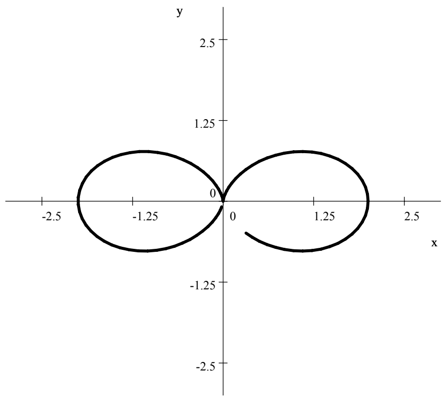


En kurva som inte är sluten.

En orienterad kurva $\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in [a,b], t = a$ är startpunkt$\}$ är en **enkel kurva** om den inte skär sig själv, dvs $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ för alla t_1 och t_2 i integrationsintervallet $[a,b]$. Alla parametervärden ger olika punkter. En åtta "8" är tydligen inte enkel, ty den skär sig själv i en punkt.



Inte enkel men sluten.



Inte enkel, inte sluten.

En kurva Γ som är både enkel och sluten är rand till ett väldefinierat område D i planet som fungerar som integrationsområde för en dubbelintegral. Vi kräver också att längden av Γ är ändlig. En kurvintegral av ett vektorfält $(P(x,y), Q(x,y))$ där kurvan är sluten beteckas med symbolen $\oint$, alltså

$$\oint_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Eftersom $\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = -\oint_{-\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ måste vi också specificera vilken genomloppsriktning vi har. **Positiv led** defineras som moturs, dvs motsvarande växande vinklar till positiva x-axeln.

18.1.2 Greens formel

Sats 1 (Greens formel) *Om vektorfältet har kontinuerliga partiella derivator P'_y och Q'_x överallt i D innanför den enkla slutna orienterade kurvan Γ som genomlöps i positiv led och är rand till området D, så kan kurvintegralen beräknas som följande dubbelintegral:*

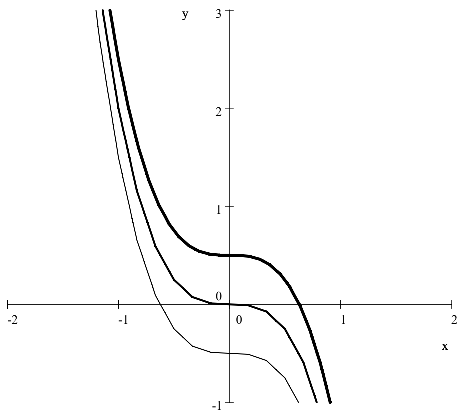
$$\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{D} (Q'_x - P'_y)dxdy.$$

Inte sällan är dubbelintegralen betydligt enklare att lösa. Greens formel spelar också en viktig roll för potentialbegreppet, som strax kommer att definieras. Observera att P'_y och Q'_x måste vara kontinuerliga *överallt* i D, det får inte finnas någon diskontinuitetspunkt.

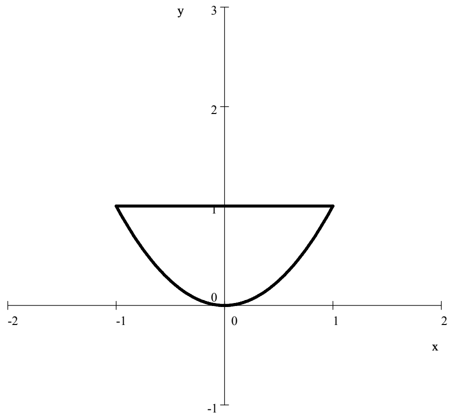
Exempel 2 *(1007) Beräkna $\int_{\Gamma}(x^4 - y^2)dx + (x^4 + y^2)dy$ längs $y = x^2$ från $(-1,1)$ till $(1,1)$ och linjen $y = 1$ från $(-1,1)$ till $(1,1)$.*

Lösning: Denna kurvintegral beräknades i förra avsnittet, men beräknas här med Greens formel. Kurvan är sluten, enkel och genomlöps i positiv led. Vi får då enligt Greens formel

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma (x^4 - y^2)dx + (x^4 + y^2)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^4 + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^4 - y^2)\right)dxdy \\
&= \iint_D (4x^3 + 2y)dxdy.
\end{aligned}$$



Nivåkurvor till funktionen $4x^3 + 2y$.



Integrationsområdet D.

Vi kan integrera i y-led först, dvs från x^2 till 1. Då går x från -1 till 1. Det ger

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}(4x^3 + 2y))dxdy &= \int_{-1}^{1}[4x^3y + y^2]_{y=x^2}^{y=1}dx \\
&= \int_{-1}^{1}(4x^3 + 1 - 4x^5 - x^4)dx \\
&= [x^4 + x - \frac{2}{3}x^6 - \frac{x^5}{5}]_{-1}^{1} \\
&= 2(1 - \frac{1}{5}) = \frac{8}{5}.
\end{aligned}$$

Svar: $\oint_\Gamma (x^4 - y^2)dx + (x^4 + y^2)dy = \frac{8}{5}$.

Exempel 3 *Beräkna* $\oint_\Gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ *längs cirkelbågen* $x^2 + y^2 = 1$ *i positiv led.*

Lösning: Här har vi en sluten kurva, men ändå kan Greens formel inte användas. Det beror på att vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ inte är kontinuerligt i origo, som är en punkt innanför den slutna kurvan (cirkeln).

Så vi måste parameterisera. Här är polära kooridinater enklast. Kurvan är då $(\cos t, \sin t)$ med t från 0 till $t = 2\pi$, och vektorfältet är $(\frac{-\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}) = (-\sin t, \cos t)$. En tangent är $(-\sin t, \cos t)$, så vi får

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' &= (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) \\ &= \cos^2 t + \sin^2 t = 1. \end{aligned}$$

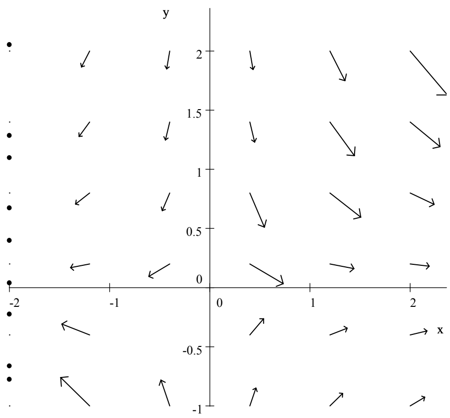
Integralen blir således

$$\oint_\Gamma \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

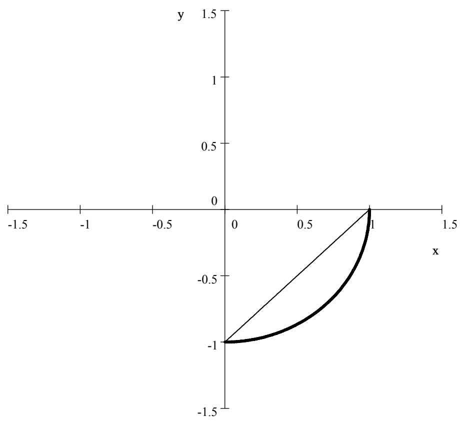
Svar: $\oint_\Gamma \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = 2\pi.$

Exempel 4 *(1018) Beräkna* $\int_\Gamma \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$ *längs cirkelbågen* $x^2 + y^2 = 1$ *från* $(0,-1)$ *till* $(1,0)$.

Lösning: Här är Γ inte någon sluten kurva, men vi kompletterar den med kurvan γ som är en rät linje mellan $(1,0)$ och $(0,-1)$ (i denna ordning) så att $\Gamma + \gamma$ är en sluten kurva. Då håller vi oss också borta från linjen $y = x$, där vektorfältet $(\frac{x-y}{(x-y)^2}, \frac{-y}{(x-y)^2})$ inte är definierat (noll i nämnaren).



Vektorfältet $(\frac{x}{(x-y)^2}, \frac{-y}{(x-y)^2})$.



Integrationsområdet D.

Vi lägger till och drar ifrån integralen över γ, så får vi en sluten kurva där vektorfältet är definierat överallt innanför kurvan. Då kan Greens formel användas.Vi får:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2} &= \int_\Gamma \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2} + \int_\gamma \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2} - \int_\gamma \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2} \\ &= \oint\limits_{\Gamma+\gamma} \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2} - \int_\gamma \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}.\end{aligned}$$

Greens formel på $\oint\limits_{\Gamma+\gamma} \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$ ger integranden

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x-y)^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{(x-y)^2} &= \{\text{derivering av kvot}\} \\ &= \frac{(x-y)^2-2(x-y)x}{(x-y)^4} + \frac{-(x-y)^2+(x-y)2y}{(x-y)^4} \\ &= \frac{x+y}{(x-y)^3} - \frac{x+y}{(x-y)^3} = 0.\end{aligned}$$

Så $\oint\limits_{\Gamma+\gamma} \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2} = \iint\limits_D 0dxdy = 0.$

Den andra integralen löses lätt med parameterframställningen $(t, t-1)$, $t = [0,1]$. Vi får $\mathbf{r}'(t) = (1,1)$, och

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2} &= \int_0^1 \frac{tdt-(t-1)dt}{(t-(t-1))^2} \\ &= \int_0^1 dt = 1.\end{aligned}$$

Svar: $\int_\gamma \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2} = 1.$

18.2 Konservativa vektorfält

I det senaste exemplet såg vi att $P'_y - Q'_x = 0$ ledde till att

$$\oint\limits_{\Gamma+\gamma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = 0$$

Om vi igen delar upp integralen enligt

$$\begin{aligned}0 &= \oint\limits_{\Gamma+\gamma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} \\ &= \int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} + \int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr},\end{aligned}$$

alltså

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_{-\gamma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$$

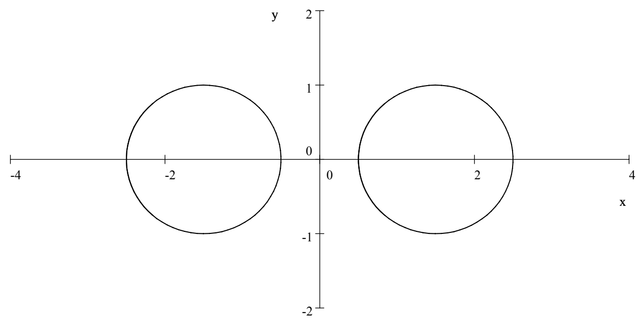
där Γ och $-\gamma$ är två olika kurvor från $(-1, 0)$ till $(0, 1)$. Man säger då att kurvintegralen är oberoende av vägen, vilket är kännetecknande för ett konservativt vektorfält. Detta gäller generellt, som vi ska se härnäst.

18.2.1 Områden i planet

Vi behöver för fortsättningen två begrepp för områden $D \subset \mathbf{R}^2$.

Definition 5 *Ett område $D \subset \mathbf{R}^2$ är **sammanhängande** om det för alla punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) i D finns en kurva mellan punkterna som helt ligger i området.*

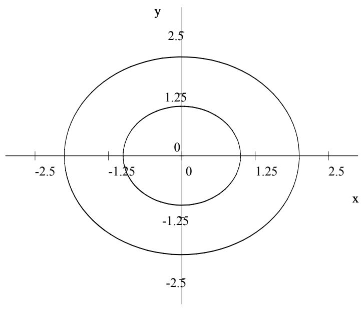
Ett område är alltså sammanhängande om det inte består av två eller flera "öar", utan det finns en väg mellan vilket par av punkter som helst.



Området innanför de båda cirklarna är inte **sammanhängande**.

Definition 6 *Ett område $D \subset \mathbf{R}^2$ är **enkelt sammanhängande** om varje sluten kurva som ligger helt i D kan kontinuerligt krympas till en punkt så att kurvan hela tiden under denna process ligger helt i D, inklusive punkten.*

Ett område är enkelt sammanhängande om det inte har några hål som inte ligger i D. Om D har ett hål så kan en sluten kurva runt detta hål inte krympas till en punkt utan att någon del av kurvan någon gång passerar detta hål. I så fall finns en del av kurvan inte i D någon gång under krympningsprocessen.



Området mellan de båda cirklarna är inte **enkelt sammanhängande**.

Notera att detta område är sammanhängande, tyvarje par av punkter kan förbindas med en kurva helt i området. Området i de två disjunkta cirklarna är enkelt sammanhängande, ty det saknas hål.

Området $\{x^2 + y^2 \leq 1, (x, y) \neq (0, 0)\}$ är inte enkelt sammanhängande eftersom origo inte finns med. Det räcker att en punkt i det inre inte tillhör mängden för att området inte ska vara enkelt sammanhängande.

Definition 7 *Om* $\mathbf{F}$ *är ett vektorfält från* $\mathbf{R}^2$ *till* $\mathbf{R}^2$ *som är definierad i ett öppet och sammanhängande område* D*. Om*

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$

för alla kurvor Γ *och* γ *med samma start- och slutpunkt, så är vektorfältet* ***konservativt****. Kurvintegralen är då* ***oberoende av vägen****.*

18.3 Potential

Om vektorfältet är konservativt i ett område D kan vi skriva en kurvintegral som

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$

där (x_1, y_1) är startpunkt och (x_2, y_2) är slutpunkt, eftersom integralen har samma värde oberoende av vilken väg man går från (x_1, y_1) till (x_2, y_2). Detta betyder att om vi fixerar en punkt p i ett området D så definieras en funktion på D av integralen

$$(x, y) \to \int_{\mathbf{p}}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}.$$

Detta är en **potential** $U(x, y)$ till det konservativa vektorfältet $\mathbf{F}(x, y)$. Det gäller då att

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1),$$

ty

$$\begin{aligned}\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} &= \int_{(x_1,y_1)}^{\mathbf{p}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} + \int_{\mathbf{p}}^{(x_2,y_2)} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} \\ &= U(x_2,y_2) - U(x_1,y_1).\end{aligned}$$

Då gäller att

$$\begin{aligned}U_x'(x,y) &= P(x,y) \text{ och} \\ U_y'(x,y) &= Q(x,y),\end{aligned}$$

dvs $gradU = \mathbf{F}$, ty då får vi

$$\begin{aligned}\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} &= \int_a^a (Q(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))x'(t))dt \\ &= \int_a^a (U_x'(x(t),y(t))x'(t) + U_x'(x(t),y(t))x'(t))dt \\ \{\text{kedjeregeln}\} &= \int_a^a (\frac{d}{dt}U(x(t),y(t))dt \\ &= U(x(b),y(b)) - U(x(a),y(a)).\end{aligned}$$

En potential till ett konservativt vektorfält är en motsvarighet till en primtiv funktion för en funktion av en variabel. Observera att bara konservativa fält har potential. Däremot har alla kontinuerliga funktioner en primitiv funktion.

18.4 Exakta vektorfält

Definition 8 *Ett vektorfält* $(P(x,y), Q(x,y))$ *är ett* ***exakt vektorfält*** *om* $P_y' = Q_x'$.

Sats 9 *Om D är sammanhängande är följande villkor ekvivalenta:*

1. $\mathbf{F}$ *är ett konservativt vektorfält*
2. $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ *oberoende av vägen*
3. $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \mathbf{0}$ *om* $\Gamma \subset D$
4. $\mathbf{F}$ *har en potential.*

Om vi lägger till kravet att D dessutom ska vara enkelt sammanhängande så kan vi lägga till villkoret att vektorfältet är exakt:

Sats 10 *Om D är enkelt sammanhängande är följande villkor ekvivalenta:*

1. $\mathbf{F}$ *är ett konservativt vektorfält*
2. $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ *oberoende av vägen*
3. $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \mathbf{0}$ *om* $\Gamma \subset D$
4. $\mathbf{F}$ *har en potential*
5. $\mathbf{F}$ *är ett exakt vektorfält.*

Orsaken till att exakta vektorfält är speciella är att $P'_y = Q'_x$ är ett lokalt villkor – man behöver bara testa enstaka punkter i området. Att integralen är $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ oberoende av vägen är inte lokalt. Nästa exempel belyser detta.

Exempel 11 *Är vektorfältet* $\mathbf{F} = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ *på cirkelringen* $\{1 \le x^2+y^2 \le 9\}$ *exakt? Konservativt?*

Lösning: Det är exakt ty

$$\begin{aligned} P'_y &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2} - 2\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{(x+y)(y-x)}{(x^2+y^2)^2}, \text{ medan} \\ Q'_x &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{(x+y)(y-x)}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Så $P'_y = Q'_x$.

Men om Γ är cirkeln $x^2+y^2 = 4$ så har vi parameterframställningen $(2\cos t, 2\sin t)$. Då har vi tangent $(-2\sin t, 2\cos t)$ och $\mathbf{F} =\frac{1}{4}(-\sin t, \cos t)$, så $\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}' = \frac{1}{4}(-\sin t, \cos t)\cdot(-2\sin t, 2\cos t) = \frac{1}{2}\sin^2 t + \frac{1}{2}\cos^2 t = \frac{1}{2}$. Så

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}dt = \boldsymbol{\pi}$$

som inte är noll. Så vektorfältet är inte konservativt.

Svar: Vektorfältet är exakt men inte konservativt.

Problemet är här att vektorfältet $\mathbf{F} = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ är singulärt i origo. Det går inte att komma undan denna singularitet genom att omdefiniera området ty integrationen sker i en cirkel runt denna punkt. I nästa exempel med samma vektorfält går detta bättre.

Exempel 12 *Beräkna* $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ *då* $\mathbf{F} = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ *och då* Γ *är kurvan från* $(1, 1)$ *till* $(1, -1)$.

Här har vi samma vektorfält, vilket är konservativt på området $D = \{x \geq \frac{1}{2}\}$. Detta område är enkelt sammanhängande och $\mathbf{F}$ är deriverbar överallt i D. Vi beräknar kurvintegralen genom att beräkna en potential $U(x, y)$ till $\mathbf{F}$.

$$U'_x = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{y} \frac{-y}{(\frac{x}{y})^2 + 1}.$$

Detta ger genom x-integration att

$$U(x, y) = -\arctan \frac{x}{y} + f(y).$$

Här är $f(y)$ någon funktion av y. Derivation m.a.p. x bekräftar detta. Deriverar vi nu m.a.p. y så fås

$$\begin{aligned} U'_y &= \frac{\partial}{\partial y}(-\arctan \frac{x}{y} + f(y)) \\ &= -(-\frac{x}{y^2}) \frac{1}{(\frac{x}{y})^2 + 1} + f'(y) \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} + f'(y). \end{aligned}$$

Med $f'(y) = 0$ så får vi $U'_y = Q(x, y)$. Så vi har potentialen

$$U(x, y) = -\arctan \frac{x}{y}.$$

Då är

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} &= U(1, 1) - U(1, -1) \\ &= \arctan 1 - \arctan(-1) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Svar: $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \frac{\pi}{4}$.

18.5 Beräkningsmetoder av kurvintegraler

En metod finns alltid: att sätta in en parameterframställning av kurvan och beräkna enkelintegralen enligt definitionen av kurvintegral.

Om kurvan är sluten och vektorfältet deriverbart överallt i det inre så kan Greens formel användas.

Om kurvan inte är sluten kan kurvan kompletteras så den blir sluten och på så sätt att vektorfältet är deriverbart överallt i det inre. Då blir resultatet två integraler, en dubbelintegral från Greens formel och en enkelintegral över det kurvstycke som lades till.

Om fältet är konservativt kan man byta kurva mellan de två punkterna till vilken kurva helst inom det område där vektorfältet är definierat. Man kan då också beräkna en potential, som i det senaste exemplet.