Nr 24, 24 maj -05, Amelia 2

24 Integraler av masstyp

24.1 Kurvintegraler av masstyp

Vi har hittills studerat en typ av kurvintegral, $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$, där vi integrerar den komponent av ett vektorfält $\mathbf{F}$ som är tangentiell till kurvan $(\cdot\mathbf{dr})$ i punkter på kurvan. I en linjeintegral (=kurvintegral) av masstyp integrerar vi inte ett vektorfält $\mathbf{F}$:$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ utan ett skalärt fält $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. Vi summerar helt enkelt värdena av funktionen $f(x, y, z)$ längs kurvan. Alltså:

Definition 1 *En* ***kurvintegral av masstyp*** $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *är en integral av typen*

$$\int_\Gamma f(\mathbf{r})ds = \int_a^b f(\mathbf{r})|\mathbf{r}'(t)|dt$$

där Γ *är en regulär kurva med parameterframställning* $\mathbf{r}(t)$, *från* $t = a$ *till* $t = b$.

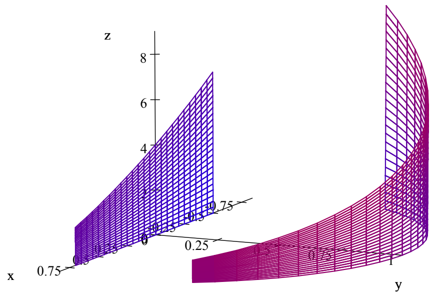
Här är $ds = |\mathbf{r}'(t)|dt$ kurvelementet. Vi påminer om att $\int_a^b |\mathbf{r}'(t)|dt$ är kurvans längd.

Antag att $f(x, y, z)$ endast beror på x, vi har alltså $f(x)$. Antag också att Γ är ett intervall på x-axeln med parameterframställning $\mathbf{r}(t) = (t, 0)$, så får vi $|\mathbf{r}'(t)| = |(1, 0)| = 1$. Det ger

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(\mathbf{r})ds &= \int_a^b f(t)\cdot 1\cdot dt \\ &= \int_a^b f(t)dt\end{aligned}$$

som alltså är en vanlig enkelintegral. Man kan därför tolka $\int_\Gamma f(\mathbf{r})ds$ som **arean under** f **på kurvan** Γ. Detta är en helt annan innebörd än kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$.

I följande figur har vi till vänster en yta över ett intervall på x-axeln, som är den vanliga tolkningen av en integral $\int_a^b f(x)dx$. Till höger har vi en yta över en cirkelbåge, som är en kurvintegral av masstyp $\int_\Gamma f(\mathbf{r})ds$.



Cirkelbågen betecknar vi i $\int_\Gamma f(\mathbf{r})ds$ med Γ, och $f(x,y,z)$ är höjden i punkten (x,y,z) på kurvan. Funktionen f är en funktion av tre variabler, men på kurvan har vi sammansättningen av $(x(t),y(t),z(t)) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ med $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, nämligen funktionen $f(x(t),y(t),z(t))$ som är en funktion av *en* variabel – parametern t.

Exempel 2 *(1130) Beräkna kurvintegralen* $\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2+z^2}ds$ *där* Γ *är sträckan från* $(0,0,0)$ *till* (a,b,c).

Lösning: Här har vi en rät linje, så en parameterframställning är

$$\begin{aligned} x &= at \\ y &= bt \\ z &= ct. \end{aligned}$$

Då får vi $(0,0,0)$ vid insättning av $t=0$ och (a,b,c) vid insättning av $t=1$. Således: eller annorrlunda uttryckt $\mathbf{r} = (at,bt,ct)$.

Vi ska beräkna $\int_a^b f(\mathbf{r})|\mathbf{r}'(t)|dt$. Funktionen $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ är på linjen $f(\mathbf{r})$, dvs

$$f(\mathbf{r})\sqrt{(at)^2+(bt)^2+(ct)^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}t.$$

Vi slipper $|t|$ här ty $0 \le t \le 1$. Vidare ger $\mathbf{r} = (at,bt,ct)$ att

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (a,b,c), \text{ så} \\ |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{a^2+b^2+c^2}. \end{aligned}$$

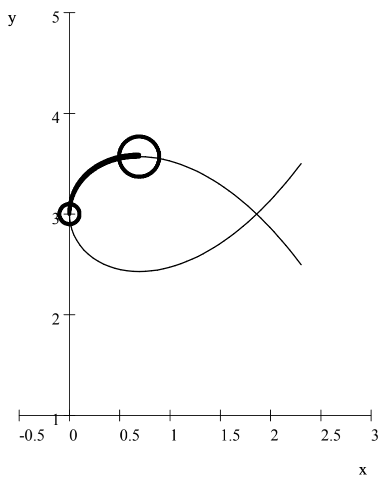
Insättning i $\int_a^b f(\mathbf{r})|\mathbf{r}'(t)|dt$ ger nu

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\mathbf{r})|\mathbf{r}'(t)|dt &= \int_0^1 \sqrt{a^2+b^2+c^2}t\sqrt{a^2+b^2+c^2}dt \\ &= (a^2+b^2+c^2)[\frac{t^2}{2}]_0^1 \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2}. \end{aligned}$$

Svar: $\int_a^b f(\mathbf{r})|\mathbf{r}'(t)|dt = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

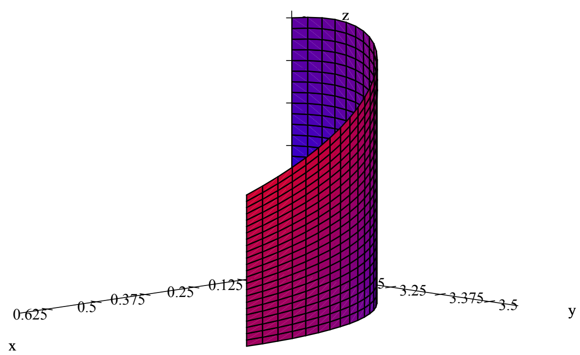
Exempel 3 *(1130) Beräkna kurvintegralen* $\int_\Gamma ye^{-x}ds$ *där* Γ *är kurvan* $x = \ln(1+t^2)$, $y = 3 - t + 2\arctan t$, t *från* 0 *till* 1.

Lösning: Vi har följande kurva,



Kurvan Γ, från start ($\circ$) till mål ($\bigcirc$).

och funktionen ye^{-x} har följande värden på kurvan:



Vi ska alltså räkna ut den buktiga arean. Här är den cylindrisk i meningen att den är rät i en dimension, och därför kan vecklas ut till ett plan utan att arean ändras. Detta är som bekant inte möjligt med exempel en sfärisk yta.

Vi ska beräkna $\int_a^b f(\mathbf{r})|\mathbf{r}'(t)|dt$, så vi behöver först $\mathbf{r}'(t)$ och sedan $|\mathbf{r}'(t)|$. Parameterframställningen $x = \ln(1+t^2)$, $y = 3 - t + 2\arctan t$, alltså $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\ln(1+t^2), 3 - t + 2\arctan t)$ ger

$$\mathbf{r}'(t) = (\frac{2t}{1+t^2}, -1 + \frac{2}{1+t^2}).$$

Här är $-1 + \frac{2}{1+t^2} = \frac{-1-t^2}{1+t^2} + \frac{2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Alltså:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)|^2 &= (\frac{2t}{1+t^2})^2 + (\frac{1-t^2}{1+t^2})^2 \\ \{\text{utveckla}\} &= \frac{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4}{(1+t^2)^2} = \{\text{kvadrat-} \\ \text{komplettera}\} &= \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1. \end{aligned}$$

Insättning av $(x(t), y(t)) = (\ln(1+t^2), 3 - t + 2\arctan t)$ ger

$$\begin{aligned} f(x,y) &= ye^{-x} \\ &= (3 - t + 2\arctan t)e^{-\ln(1+t^2)} \\ &= (3 - t + 2\arctan t)\frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Så integralen blir

$$\begin{aligned} \int_\Gamma ye^{-x}ds &= \int_0^1 (3 - t + 2\arctan t)\frac{1}{1+t^2}1dt \\ &= \int_0^1 \frac{3-t}{1+t^2}dt + 2\int_0^1 \arctan t \frac{1}{1+t^2}dt. \end{aligned}$$

Vi får beräkna de två integralerna var för sig. Vi får först

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{3-t}{1+t^2}dt &= \int_0^1 (\frac{3}{1+t^2}dt - \frac{t}{1+t^2})dt \\ &= [3\arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)]_0^1 \\ &= 3\arctan 1 - \frac{1}{2}\ln 2 - 0 + 0 \\ &= 3\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \end{aligned}$$

ty $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Den andra termen kan beräknas med partialintegration, om $\arctan t$ deriveras (till $\frac{1}{1+t^2}$) och $\frac{1}{1+t^2}$ integreras (till $\arctan t$):

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 \arctan t \frac{1}{1+t^2}dt &= 2[(\arctan t)^2]_0^1 - 2\int_0^1 \arctan t \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= 2(\arctan 1)^2 - (\text{samma integral!}). \end{aligned}$$

Genom att flyttta samma integral till vänsterledet får vi

$$2\int_0^1 \arctan t \frac{1}{1+t^2}dt + 2\int_0^1 \arctan t \frac{1}{1+t^2}dt = 2(\frac{\pi}{4})^2,$$

alltså

$$\int_0^1 \arctan t \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{12}\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32}.$$

Således har vi

Svar: $\int_\Gamma ye^{-x}ds = 3\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi^2}{32}$ (≈ 2.318).

24.2 Ytintegraler av masstyp

Vad gäller ytintegraler har vi endast studerat arean av en buktig yta $\int |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv$ samt integraler $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{n}}dS$, som ofta kallas en normalytintegral. Här integrerar vi den komponent av ett vektorfält $\mathbf{F}$ som är normal till kurvan $(\cdot\widehat{\mathbf{n}})$ i punkter på ytan.

I en ytintegral av masstyp integrerar vi inte ett vektorfält $\mathbf{F}$: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, som i $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{n}}dS$, , utan ett skalärt fält $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. Vi summerar helt enkelt värdena av funktionen $f(x, y, z)$ på ytan. Alltså:

Definition 4 *En **ytintegral av masstyp** $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ är en integral av typen*

$$\int_S f(\mathbf{r})dS = \int_D f(\mathbf{r})|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv$$

där S är en regulär yta med parameterframställning $\mathbf{r}(u, v)$, där $(u, v) \in D$.

Här är naturligtvis $|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv$ ytelementet.

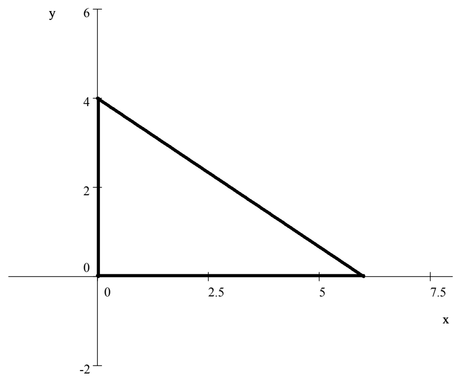
Exempel 5 *(1135b) Beräkna ytintegralen $\int_S (y + 2z)dS$ där S är den del av planet $2x + 3y + 6z = 12$ som ligger i första oktanten.*

Lösning: Ytan S är planet $2x + 3y + 6z = 12$ begränsat av $x = 0$, $y = 0$ och $z = 0$. Sätter vi in dessa ekvationer får vi $3y + 6z = 12$ (dvs $y + 2z = 4$), $2x + 6z = 12$ (dvs $x + 3z = 6$) och $2x + 3y = 12$.

Om vi tar x och y som parametrar (vi kan också kalla dem u och v) så är

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= 2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y \end{aligned}$$

en parameterframställning (om vi kallar parametrarna u och v har vi alltså $x = u$, $y = v$ och $z = 2 - \frac{1}{3}u - \frac{1}{2}v$), där x och y begränsas av $x = 0$, $y = 0$ och $2x + 3y = 12$.



Integrationsområdet.

Integrationsområdet är kan alltså beskrivas som $0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4 - \frac{2}{3}x$ alternativt som $0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq 6 - \frac{3}{2}y$.

Vi kan skriva denna även som

$$\mathbf{r} = (x, y, 2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y).$$

Vi ska beräkna $\int_D f(\mathbf{r})|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv$. Funktionens värden $f(\mathbf{r})$ på ytan S får vi genom att sätta in parameterframställningen:

$$\begin{aligned} y + 2z &= y + 2(2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y) \\ &= 4 - \frac{2}{3}x. \end{aligned}$$

Här är

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_x &= (1, 0, -\frac{1}{3}) \text{ och} \\ \mathbf{r}'_y &= (0, 1, -\frac{1}{2}), \end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y &= (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1), \text{ och} \\ |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| &= |(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + 1} \\ &= \sqrt{\frac{4 + 9 + 36}{36}} = \sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Då har vi alla ingredienser i $\int_D f(\mathbf{r})|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|dudv$.. Vi får

$$\begin{aligned}
\int_D f(\mathbf{r})|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|dudv &= \int_0^6 \int_0^{4-\frac{2}{3}x} (4 - \frac{2}{3}x)\frac{7}{6}dxdy \\
&= \frac{7}{9}\int_0^6 (\int_0^{4-\frac{2}{3}x} (6-x)dxdy \\
&= \frac{7}{9}\int_0^6 (6-x)(4-\frac{2}{3}x)dx = \frac{7}{9}\int_0^6 (\frac{2}{3}x^2 - 8x + 24)dx \\
&= \frac{7}{9}[\frac{2}{9}x^3 - 4x^2 + 24x]_0^6 \\
&= \frac{7}{9}(\frac{2}{9} \cdot 108 - 4 \cdot 36 + 24 \cdot 6) \\
&= \frac{112}{3}.
\end{aligned}$$

Svar: $\int_D f(\mathbf{r})|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|dudv = \frac{112}{3}$.

Exempel 6 *(1130) Beräkna ytintegralen* $\int_S (x^2 + y^2)ds$ *där* S *är konen* $z^2 = x^2 + y^2$ *då* $0 \leq z \leq 1$.

Lösning: En parameterframställning för konen är

$$\begin{aligned}
x &= r\cos t \\
y &= r\sin t \\
z &= r,
\end{aligned}$$

med $0 \leq t \leq 2\pi$ och $0 \leq r \leq 1$. Denna parameterframställning uppfyller ekvationen $z^2 = x^2 + y^2$ – insättning bekräftar det med hjälp av en trigonometrisk etta. Med $\mathbf{r}(r,t) = (r\cos t, r\sin t, r)$ får vi

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_r &= (\cos t, \sin t, 1) \text{ och} \\
\mathbf{r}'_t &= (-r\sin t, r\cos t, 0),
\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_r \times \mathbf{r}'_t &= (\cos t, \sin t, 1) \times (-r\sin t, r\cos t, 0) \\
&= (-r\cos t, -r\sin t, r), \text{ och} \\
|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y|^2 &= r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t + r^2 \\
&= 2r^2.
\end{aligned}$$

Integranden $x^2 + y^2$ blir $x^2 + y^2 = r^2$, så vi får

$$\begin{aligned}
\int_D f(\mathbf{r})|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|dudv &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2\sqrt{2r^2}drdt \\
&= \sqrt{2}2\pi[\frac{r^4}{4}]_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Svar: $\int_D f(\mathbf{r})|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|dudv = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.