Nr 13, 14 april -05, Amelia 2

13 Generaliserade dubbelintegraler

13.1 Generaliserade enkelintegraler

Integrerbarhet är definierat för funktioner som är begränsade och definierade på ett ändligt intervall. Detta kan i många fall utvidgas, på två sätt: till till obegränsade intervall och till funktioner som inte är begränsade.

13.1.1 Obegränsade intervall

Om $f(x)$ är integrerbar på alla ändliga delintervall till (a, ∞) så kan man definiera den generaliserade integralen $\int_a^\infty f(x)dx$ som gränsvärdet

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)dx.$$

Då är $\int_a^\infty f(x)dx$ *är* konvergent om gränsvärdet $\lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)dx$ existerar

som ett egentligt gränsvärde. Annars är integralen divergent. Man löser alltså en vanlig integral, $\int_a^N f(x)dx$, och betraktar sedan gränsvärdet av detta då $N \to \infty$. På helt analogt sätt kan vi definiera den generaliserade integralen $\int_{-\infty}^a f(x)dx$.

I egenskap av gränsvärde finns det för generaliserade integraler jämförelsesatser, varav den enklaste är den följande:

Sats 1 *Antag att funktionerna f och g är integrerbara och begränsade på alla ändliga delintervall till $[a, \infty)$. Då gäller följande:*

1. *Om $0 \le f(x) \le g(x)$ och $\int_a^\infty f(x)dx$ är divergent, så är $\int_a^\infty g(x)dx$ divergent.*

2. *Om $0 \le f(x) \le g(x)$ och $\int_a^\infty g(x)dx$ är konvergent, så är $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergent.*

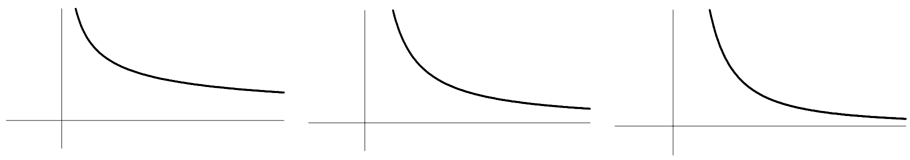
I 2. till exempel, är avsikten att $f(x)$ är en komplicerad funktion, som $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ som man får besked om ("$\int_a^\infty f(x)dx$ konvergent") med hjälp av en enkel funktion, som $g(x) = \frac{1}{x}$. För det måste vi ha en viss olikhet, vilket gäller i detta exempel, ty $0 \le \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} \le \frac{1}{x}$.

Följande enkla generaliserade integraler används oftast att jämföra mer komplicerade integraler med ($\frac{1}{x}$ svarar mot $a = -1$).

Sats 2 *$\int_1^\infty x^a dx$ är konvergent om $a < -1$, och har då värdet $-\frac{1}{a+1}$. Om $a \ge -1$ är integralen divergent.*

Satsen kan lätt visas ty integranden är lätt att integrera.

Det betyder exempelvis att $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ är divergent ($a = -\frac{1}{2}$), men $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ är konvergent ($a = -\frac{3}{2}$). Gränsfallet är $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$,som är divergent. Detta är ganska omöjligt att avgöra från en figur:



$x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $x^{-1} = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $x^{-3/2} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

En integral är alltså konvergent om det finns tal som areans storlek aldrig passerar hur stort integrationsintervall man än tar för denna area. Integralen är divergent om arean passerar alla gränser vid ökande integrationsintervall. Detta gäller positiva funktioner.

13.1.2 Obegränsade funktioner

Om vi har en funktion $f(x)$ som är obegränsad på intervallet (a, b), men begränsad och integrerbar på $(a + \varepsilon, b)$ för alla $\varepsilon > 0$ och $\varepsilon < b - a$, så kan vi definiera den generaliserade integralen $\int_a^b f(x)dx$ som

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Om detta gränsvärde existerar säger vi att $\int_a^b f(x)dx$ är konvergent, annars är $\int_a^b f(x)dx$ divergent.

På motsvarande sätt kan en integral vara generaliserad i högerändpunkt, eller i någon annan punkt i intervallet. Den följande integralen är generaliserad i $x = 0$, och är ett vanligt jämförelseobjekt för motsvarande jämförelsesats.:

Sats 3 *$\int_0^1 x^a dx$ är konvergent om $a > -1$, integralen har då värdet $\frac{1}{a+1}$. Om $a \leq -1$ är integralen divergent.*

Således är $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ konvergent men $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ är divergent. Notera att vi här har ett annat integrationsintervall än ovan.

13.2 Dubbelintegraler

I dubbelintegralfallet gör man på analogt sätt som för enkelintegraler.

13.2.1 Obegränsat område

Ett område D i $\mathbf{R}^2$ är **begränsat** om det finns en cirkelskiva $C_R = \{\sqrt{x^2+y^2} \leq R\}$ (med en tillräckligt stor radie R) så att hela D ligger i cirkelskivan: $D \subset C_R$.

Ett område är **obegränsat** om det inte är begränsat. Men då är $D \cap C_R$ (punkterna som ligger i både D och C_R) ett begränsat område, och om vi låter radien R i C_R gå mot oändligheten får vi till slut hela D. Om D är obegränsat definierar vi den generaliserade integralen på detta sätt, alltså som ett gränsvärde av integraler på begränsade områden:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{R\to\infty} \iint_{D\cap C_R} f(x,y)dxdy.$$

Om gränvärdet existerar är den generaliserade integralen **konvergent**, annars **divergent**.

Exempel 4 *Beräkna integralen* $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ *där D är hela planet.*

Här har vi ett obegränsat område – hela planet. Denna integral kan skriva som $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$. Vi använder polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases},$$

då vi har $dxdy = rdrd\theta$, och får på ett cirkelområde $C_R = \{\sqrt{x^2+y^2} \leq R\}$ med $x^2+y^2 = r^2$:

$$\begin{aligned} \iint_{D\cap C_R} e^{-x^2-y^2}dxdy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-r^2} rdr \\ &= 2\pi[-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_0^R = \pi(1-e^{-R^2}). \end{aligned}$$

Men eftersom $e^{-R^2} \to 0$ då $R \to \infty$ så får vi

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi.$$

Kommentar: Som bekant saknar funktionen e^{-x^2} en enkel primitiv funktion. Men om vi noterar att

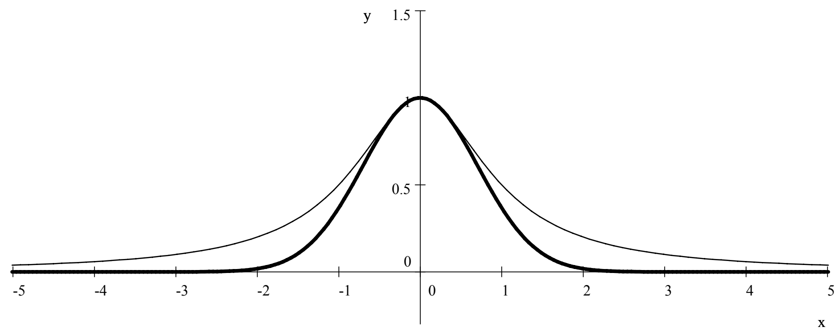
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy \\ \{\text{bara olika integrationsvariabel}\} &= (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx)^2, \end{aligned}$$

så följer från detta att $(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx)^2 = \pi$. Således:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}(\approx 1.772\,5).$$

Det går alltså att beräkna denna integral exakt, trots att e^{-x^2} saknar primitiv funktion. En annan konvergent enkelintegral är

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$



$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ och $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \pi$.

Notera att vi beräknade värdet av $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ genom att gå via en dubbelintegral och använda polära koordinater. Faktorn r som tillkommer, funktionaldeterminanten, gör att den uppkomna integranden har en primitiv funktion.

13.2.2 Obegränsade funktioner

Om $f(x,y)$ är obegränsad endast i en punkt (a,b) i integrationsområdet D så tar vi bort denna punkt med en cirkel $C_\varepsilon(a,b)$ med liten radie ε som har centrum i (a,b). Vi integrerar över återstoden $D - C_\varepsilon$ (D "men inte" C_ε, alla punkter i D som inte ligger i C_ε). När vi låter $\varepsilon \to 0$ får vi hela D utom möjligen punkten själv, men det spelar ingen roll eftersom en enstaka punkt är en nollmängd. Detta är en definition av generaliserade integral av en obegränsad funktion:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{D\cap C_\varepsilon} f(x,y)dxdy.$$

Om gränvärdet existerar är den generaliserade integralen **konvergent**, annars **divergent**.

För lösningsmetoderna betyder inte detta mycket eftersom man tar ställning till de gränsvärden som dyker upp vid insättning av gränsvärden. Jämfört med insättningen av gränsen ∞ ovan som är $\arctan\infty = \frac{\pi}{2}$, så representerar detta naturligtvis ett kort sätt att skriva ett gränsvärde: $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.

Exempel 5 *Beräkna* $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ *om* $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösning: Detta är en generaliserad integral ty integranden $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ är ∞ i punkten $(0, 0)$. Här är polära koordinater lämpliga både för område och integrand. Vi får:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{r} r dr \\
&= 2\pi \cdot 1 = 2\pi.
\end{aligned}$$

Man kan observera att vi i denna lösning inte behövde beräkna något gränsvärde alls.

Svar: $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = 2\pi$.

Vi studerar härnäst en något generaliserad version:

Exempel 6 *För vilka* a *är* $\iint\limits_D (\sqrt{x^2 + y^2})^a dxdy$ *konvergent, om* $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$?

Lösning: Detta är en tvådimensionell motsvarighet till integralen $\int_0^1 x^a dx$,som är konvergent om och endast om $a > -1$.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (\sqrt{x^2 + y^2})^a dxdy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^a r dr \\
&= 2\pi \int_0^1 r^{a+1} dr = 2\pi [\frac{1}{a+2} r^{a+2}]_0^1 \\
&= .\frac{2\pi}{a+2}(1 - \lim_{r \to 0} r^{a+2}).
\end{aligned}$$

Eftersom vi har $a+2$ i nämnaren måste vi undanta fallet $a+2 = 0$. Den undre gränsen ger här gränsvärdet $\lim_{r \to 0} r^{a+2}$ enligt definitionen av generaliserad integral. Detta gränsvärde är konvergent om exponenten är positiv, dvs $a + 2 > 0$, och divergent om $a + 2 < 0$. Fallet $a = -2$ får vi undersöka speciellt:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (\sqrt{x^2 + y^2})^{-2} dxdy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{r^2} r dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r} dr = 2\pi(1 - \lim_{r \to 0} \ln r)
\end{aligned}$$

som inte är konvergent.

Svar: $\iint\limits_D (\sqrt{x^2+y^2})^a dxdy$ är konvergent då $a > -2$ och divergent annars.

På analogt sätt kan man visa att om D istället är området *utanför* enhetscirkeln, $D = \{x^2 + y^2 \geq 1\}$, så är $\iint\limits_D (\sqrt{x^2+y^2})^a dxdy$ konvergent om $a < -2$ och inte annars.

Exempel 7 *(937c) Beräkna* $\iint \frac{x}{1+(x-2y)^2} dxdy$ *där* $D = \{0 \leq x \leq 1\}$.

Lösning: Här är området en oändligt lång vertikal remsa, mellan de två lodräta linjerna $x = 0$ och $x = 1$. Vi tillåter alltså $y \to \infty$ och $y \to -\infty$ i området. Integranden blir nog enklare med substitutionen

$$\begin{cases} u = x \\ v = x - 2y \end{cases}.$$

Notera att området förblir enkelt, det blir nu $0 \leq u \leq 1$ eftersom $u = x$. Denna substitution har funktionaldeterminant

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2.$$

Men vi behöver för dubbelintegralen omvänd funktionaldeterminant, som är

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{2}.$$

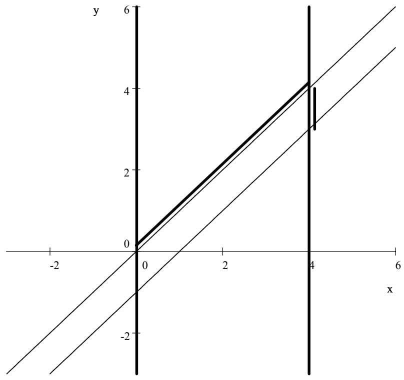
I dubbelintegranden sätter vi in absolutbeloppet av funktionaldeterminanten, så här dyker $\frac{1}{2}$ upp, och inte $-\frac{1}{2}$. I gengäld integrerar vi från $-\infty$ till ∞ och inte tvärtom, vilket annars vi borde göra i v-led eftersom $v = x - 2y$ gör att $v \to -\infty$ då $y \to \infty$.

Vi får alltså

$$\begin{aligned} \iint \frac{x}{1+(x-2y)^2} dxdy &= \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{1+v^2} \frac{1}{2} dudv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 udu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+v^2} dv \\ &= \frac{1}{2} [\frac{u^2}{2}]_0^1 [\arctan v]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Svar: $\iint \frac{x}{1+(x-2y)^2} dxdy = \frac{\pi}{4}$.

Exempel 8 *(937m) Beräkna* $\iint \frac{1}{\sqrt{(4-x)(x-y)}} dxdy$ *där* $D = \{0 \leq x \leq 4, x - 1 \leq y \leq x\}$.



Lösning: Denna integral är generaliserad ty integranden är obegränsad på två hela begränsningskurvor, på $x = 4$ och $y = x$ har vi noll i nämnaren. Här är en substitutionen $v = x - y$ lämplig både för integranden och för en av begränsningskurvorna. Så låt oss prova

$$\begin{cases} u = x \\ v = x - y \end{cases}.$$

Begränsningarna av området är $0 \leq x \leq 4$ och $x - 1 \leq y \leq x$. Den senare är olikheterna $x - 1 \leq y$ och $y \leq x$, som kan skrivas $x - y \leq 1$ och $0 \leq x - y$, dvs $0 \leq v \leq 1$. Då har vi gränserna i u och v.

Vi får funktionaldeterminant

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2,$$

så

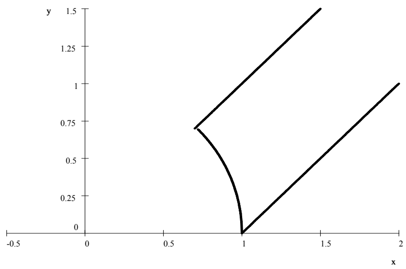
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{2}$$

och

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{\sqrt{(4-x)(x-y)}} dxdy &= \int_0^4 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-u}\sqrt{v}} \frac{1}{2} dudv \\
&= \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-u}} du \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v}} dv = \{\text{använd } \int v^a dv = \frac{v^{a+1}}{a+1}, \\
\text{där } a \text{ är } -\frac{1}{2}\} &= \frac{1}{2}[-2\sqrt{4-u}]_0^4 [2\sqrt{v}]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(-2(0-\sqrt{4}))(2(1-0)) = 4.
\end{aligned}$$

Svar: $\iint_D \frac{1}{\sqrt{(4-x)(x-y)}} dxdy = 4.$

Exempel 9 *(937o) Beräkna* $\iint \frac{x+y}{(x^2+y^2)^2} e^{x-y} dxdy$ *där* $D = \{1 \leq x^2+y^2, 0 \leq y \leq x, y \geq x-1\}$.



Lösning: Vi har här en cirkelbåge och två räta linjer. Vi har också nämnaren $(x^2+y^2)^2$ att ta hänsyn till när vi väljer variabelsubstitution. Med $u = x^2+y^2$ fångar vi in cirkelbågen och en besvärlig del av nämnaren. Med $v = x - y$ kommer gränserna att bli konstanter. Det kan vara värt att prova. Således:

$$\begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = x-y. \end{cases}.$$

Vi får funktionaldeterminant

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2x-2y = -2(x+y),$$

alltså

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{2(x+y)}.$$

Eftersom vi har en faktor $x+y$ i integranden kommer dessa att ta ut varandra, och vi behöver inte uttrycka funktionaldeterminanten i u och v.

Gränserna $y \leq x, y \geq x-1$ är $0 \leq x-y = v$ och $1 \geq x-y$, alltså $1 \geq v$. Gränsen $1 \leq x^2+y^2$ blir $u \geq 1$. Så dubbelintegralen blir

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x+y}{(x^2+y^2)^2} e^{x-y} dxdy &= \int_1^\infty \int_0^1 \frac{x+y}{u^2} e^v \frac{1}{2(x+y)} dudv \\ \{x+y \text{ försvinner!}\} &= \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{u^2} du \int_0^1 e^v dv \\ &= \frac{1}{2} [-\frac{1}{u}]_1^\infty [e^v]_0^1 \\ \frac{1}{2}(0-(-1))(e-1) &= \frac{e-1}{2}. \end{aligned}$$

Svar: $\iint_D \frac{x+y}{(x^2+y^2)^2} e^{x-y} dxdy = \frac{e-1}{2}$.