

MB7.2d.1

```
> restart;
> y1:=1/(1+x^2);
y2:=1/((1+x^2)*(4+x^2));
y3:=1/((1+x^2)*(4+x^2)*(9+x^2));
y4:=1/((1+x^2)*(4+x^2)*(9+x^2)*(16+x^2));
y5:=1/((1+x^2)*(4+x^2)*(9+x^2)*(16+x^2)*(25+x^2));
```

Fem funktioner, besläktade enligt ett bestämt mönster, införs.

$$y1 := \frac{1}{1+x^2}$$

$$y2 := \frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)}$$

$$y3 := \frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)(9+x^2)}$$

$$y4 := \frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)(9+x^2)(16+x^2)}$$

$$y5 := \frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)(9+x^2)(16+x^2)(25+x^2)}$$

```
> int(y1,x);
int(y2,x);
int(y3,x);
int(y4,x);
int(y5,x);
```

De fem funktionernas allmänna integraler.

$$\begin{aligned} & \arctan(x) \\ & -\frac{1}{6} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3} \arctan(x) \\ & -\frac{1}{30} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{24} \arctan(x) + \frac{1}{120} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \\ & -\frac{1}{360} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{360} \arctan(x) - \frac{1}{5040} \arctan\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{840} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \\ & -\frac{1}{7560} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{362880} \arctan\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{1}{8640} \arctan(x) - \frac{1}{45360} \arctan\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{13440} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \end{aligned}$$

```
> i1:=int(y1,x=0..infinity);
i2:=int(y2,x=0..infinity);
i3:=int(y3,x=0..infinity);
i4:=int(y4,x=0..infinity);
i5:=int(y5,x=0..infinity);
```

Jag beräknar integralerna från 0 till oändligheten. Alla värden, undantaget i1, är tämligen svårbegripliga och måste därför förenklas m.h.a. kommandot simplify.

$$i1 := \frac{\pi}{2}$$

$$i2 := \frac{\pi \sqrt{144}}{144}$$

$$i3 := -\frac{1}{240} I \ln(3 I) + \frac{1}{60} I \ln(2 I) + \frac{\pi}{48} + \frac{1}{240} I \ln(-3 I) - \frac{1}{60} I \ln(-2 I)$$

$$i4 := -\frac{1}{1680} I \ln(3 I) - \frac{1}{10080} I \ln(-4 I) + \frac{1}{10080} I \ln(4 I) + \frac{1}{720} I \ln(2 I) + \frac{\pi}{720} + \frac{1}{1680} I \ln(-3 I) - \frac{1}{720} I \ln(-2 I)$$

$$i5 := \frac{1}{725760} I \ln(-5 I) - \frac{1}{725760} I \ln(5 I) - \frac{1}{26880} I \ln(3 I) - \frac{1}{90720} I \ln(-4 I) + \frac{1}{90720} I \ln(4 I) + \frac{1}{15120} I \ln(2 I) + \frac{\pi}{17280} + \frac{1}{26880} I \ln(-3 I) - \frac{1}{15120} I \ln(-2 I)$$

```
> simplify(i1);
simplify(i2);
simplify(i3);
simplify(i4);
simplify(i5);
```

Integralernas förenklade värden. Alla 5 intergraler är som synes konvergenta.

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{12}$$

$$\frac{\pi}{120}$$

$$\frac{\pi}{2016}$$

$$\frac{\pi}{51840}$$