KTH Teknikvetenskap

Repetitionskurs i linjär algebra
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kompletteringstentamen
Lördagen den 14 augusti 2010

Uppgift

Fjärdegradsekvationen $z^4 + 4z^3 - 8z + 20 = 0$ har reella koefficienter och de komplexa rötterna förekommer därmed i konjugerade par.

1. Kontrollera att $z = 1 + i$ är en rot till ekvationen. **(1)**
2. Använd detta för att bestämma övriga rötter till ekvationen. **(3)**

Lösningsförslag

1. Vi beräknar först potenserna av $z = 1+i$ och får att $z^2 = (1+i)(1+i) = 1+i+i+i^2 = 2i$, $z^3 = z^2 \cdot z = 2i(1+i) = -2+2i$ och $z^4 = (z^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$.

   Vi kan nu kontrollera att $z = 1 + i$ är en rot genom

   $$w^4 + 4w^3 - 8w + 20 = -4 + 4(-2+2i) - 8(1+i) + 20 = -4 - 8 - 8 + 20 + i(8-8) = 0.$$

2. Eftersom de komplexa rötterna förekommer i komplexkonjugerade par måste även $z = 1 - i$ vara en rot och vi kan dra slutsatsen att

   $$(z-1-i)(z-1+i) = (z-1)^2 + 1 = z^2 - 2z + 2$$

   är en faktor i vänsterledet av ekvationen. Vi kan med polynomdivision få fram den andra faktorn som blir

   $$z^2 + 6z + 10.$$

   Vi få fram resterande rötter med kvadratkomplettering

   $$(z+3)^2 - 9 + 10 = 0 \iff (z+3)^2 = -1 \iff z+3 = \pm i \iff z = -3 \pm i.$$

Svar:

b) Övriga rötter är $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -3 - i$ och $z_4 = -3 + i$.

Uppgift

Betrakta ekvationssystemet som på matrisform ges av

$$\begin{pmatrix} -2+t & 12-6\,t & 0 \\ -3 & 7-4\,t & -1+t \\ 8-4\,t & -12+6\,t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Visa att ekvationssystemet har en unik lösning om t inte är lika med 1 eller 2. **(2)**
2. För vilka värden på t har ekvationssystemet en en-parametrig lösning? **(2)**

Lösningsförslag

a) Det finns en unik lösning till ett homogent linjärt ekvationssystem med kvadratisk koefficientmatris om och endast om dess determinant är skild ifrån noll. Vi beräknar därför matrisens deteriminant och får

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2+t & 12-6\,t & 0 \\ -3 & 7-4\,t & -1+t \\ 8-4\,t & -12+6\,t & 0 \end{vmatrix} &= (-1)(t-1) \begin{vmatrix} t-2 & 12-6\,t \\ 8-4\,t & -12+6\,t \end{vmatrix} \\ &= -(t-1)(t-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -(t-1)(t-2)^2 \cdot (6-24) = 23(t-1)(t-2)^2 \end{aligned}$$

där vi först utvecklade determinanten efter tredje kolonnen och sedan bröt ut de gemensamma faktorerna $t-2$ från bägge raderna. Determinanten är därmed skild från noll precis om t inte är 1 eller 2, vilket skulle visas.

b) Det räcker nu att se på de två fall då det inte finns unik lösning. För $t=1$ får vi ekvationssystemet med totalmatris

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 6 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} -r_1 \\ r_2+3r_1 \\ r_3-4r_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -\frac{1}{15}r_2 \\ r_3+\frac{6}{5}r_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och det blir en en-parametrig lösning eftersom det saknas ledande etta i precis en av kolonnerna i vänsterledet.

För $t=2$ får vi istället

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}r_2 \\ r_1 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

som ger en två-parametrig lösing eftersom det saknas ledande etta i två av kolonnerna.

Svar:

b) Det finns en en-parametrig lösning precis om $t=1$.

Uppgift

Dela upp vektorn $(3, 2 - 1)$ i tre vinkelräta komposanter, av vilka den första är parallell med $(2, 1, 2)$ och den andra med $(0, 2, -1)$. **(4)**

Lösningsförslag

För att få reda på komposanterna i riktningarna $(2, 1, 2)$ och $(0, 2, -1)$ använder vi projektion och får då att

$$\mathrm{Proj}_{(2,1,2)}(3, 2, -1) = \frac{(3, 2, -1) \cdot (2, 1, 2)}{(2, 1, 2) \cdot (2, 1, 2)}(2, 1, 2) = \frac{6 + 2 - 2}{4 + 1 + 4}(2, 1, 2) = \frac{2}{3}(2, 1, 2)$$

och

$$\mathrm{Proj}_{(0,2,-1)}(3, 2, -1) = \frac{(3, 2, -1) \cdot (0, 2, -1)}{(0, 2, -1) \cdot (0, 2, -1)}(2, 1, 2) = \frac{0 + 4 + 1}{0 + 4 + 1}(0, 2, -1) = (0, 2, -1)$$

För att få reda på den sista kompsanten kan vi subtrahera de bägge första komposanterna från vektorn och får

$$(3, 2, -1) - \frac{2}{3}(2, 1, 2) - (0, 2, -1) = (\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}) = \frac{1}{3}(5, -2, -4).$$

Vi kan kontrollera att de tre komposanterna verkligen är vinkelräta mot varandra genom skalärprodukten:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{2}{3}(2, 1, 2) \cdot (0, 2, -1) = \tfrac{2}{3}(0 + 2 - 2) = 0, \\
&\tfrac{2}{3}(2, 1, 2) \cdot \tfrac{1}{3}(5, -2, -4) = \tfrac{2}{9}(10 - 2 - 8) = 0, \\
&(0, 2, -1) \cdot \tfrac{1}{3}(5, -2, -4) = \tfrac{1}{3}(0 - 4 + 4) = 0.
\end{aligned}$$

Svar: De tre komposanterna är $\frac{2}{3}(2, 1, 2)$, $(0, 2, -1)$ och $\frac{1}{3}(5, -2, -4)$.

Uppgift

Bestäm den linje i planet som i minsta-kvadratmening bäst passar till punkterna $(-4, -2)$, $(-3, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(3, 3)$. **(4)**

Lösningsförslag

Vi söker den linje vars ekvation kan skrivas $y = ax + b$ och som bäst passar till de givna punkterna. Om punkterna låg på en linje skulle a och b ges av lösningarna till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases}
-4a & +b & = & -2, \\
-3a & +b & = & -1, \\
-1a & +b & = & 0, \\
a & +b & = & 1, \\
3a & +b & = & 3.
\end{cases}$$

I och med att punkterna inte ligger på en linje är detta system inte lösbart och vi söker därför en lösning i minsta-kvadratmening, dvs där skillnaden mellan vänsterled och högerled är så liten som möjligt sett som en vektor i $\mathbb{R}^5$ med den vanliga skalärprodukten.

För att finna den minsta-kvadratlösningen betraktar vi normalekvationen, som just uttrycker villkoret att skillnaden mellan vänsterled och högerled är ortogonal mot det delrum som spänns upp av alla möjliga vänsterled. Vi får

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dvs

$$\begin{pmatrix} 36 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Med hjälp av Cramers regel kan vi invertera koefficientmatrisen och får lösningen som

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{164} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{164} \begin{pmatrix} 109 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Linjen som bäst passar till punktern ges därmed av $y = \frac{109}{164}x + \frac{30}{41}$.

Svar: Linjen med ekvation $y = \frac{109}{164}x + \frac{30}{41}$ passar bäst till punkterna i minsta-kvadratmening.

Uppgift

Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Avgör vilka tre av de sex vektorerna $\mathbf{e}_1 = (0,1,1)$, $\mathbf{e}_2 = (0,-1,1)$, $\mathbf{e}_3 = (2,2,1)$, $\mathbf{e}_4 = (2,1,2)$, $\mathbf{e}_5 = (1,1,0)$ och $\mathbf{e}_6 = (-1,0,1)$ som är egenvektorer till A. **(2)**
2. Bestäm en matris P sådan att $P^{-1}AP$ är en diagonalmatris, exempelvis genom att använda resultatet från del a). **(2)**

Lösningsförslag

a) Vi börjar med att se hur A verkar på de sex vektorerna vid multiplikation till vänster:

$$A\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 0 - 2\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 4\cdot 0 - 5\cdot 1 + 4\cdot 1 \\ 3\cdot 0 - 4\cdot 1 + 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 0 - 2\cdot(-1) + 2\cdot 1 \\ 4\cdot 0 - 5\cdot(-1) + 4\cdot 1 \\ 3\cdot 0 - 4\cdot(-1) + 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 - 2\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 4\cdot 2 - 5\cdot 2 + 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 - 4\cdot 2 + 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 - 2\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 4\cdot 2 - 5\cdot 1 + 4\cdot 2 \\ 3\cdot 2 - 4\cdot 1 + 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{e}_5 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 - 2\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 4\cdot 1 - 5\cdot 1 + 4\cdot 0 \\ 3\cdot 1 - 4\cdot 1 + 3\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{e}_6 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 4\cdot(-1) - 5\cdot 0 + 4\cdot 1 \\ 3\cdot(-1) - 4\cdot 0 + 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Därmed ser vi att $\mathbf{e}_1$ är en egenvektor med egenvärde -1, $\mathbf{e}_3$ är en egenvektor med egenvärde 1 och $_6$ är en egenvektor med egenvärde 0. Övriga tre vektorer är inte egenvektorer eftersom $A\mathbf{e}_2$ inte är parallell med $_2$, $A\mathbf{e}_4$ inte är parallell med $_4$ och $A\mathbf{e}_5$ inte är parallell med $_5$.

b) Genom att använda de tre funna egenvektorerna som bas för $\mathbb{R}^3$ får vi en diagonalmatris för den avbildning som ges av A med avseende på standardbasen. Vi får därmed att med

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

så diagonaliseras A till

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Svar:

a) $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$ och $\mathbf{e}_6$ är egenvektorer till A.

b) Matrisen $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ diagonaliserar A till $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Uppgift

Låt $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^3$. Låt $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

1. Visa att $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ också är en bas för $\mathbb{R}^3$. **(1)**
2. Bestäm transformationsmatriserna för övergång mellan baserna $\mathbf{e}$ och $\mathbf{f}$. **(3)**

Lösningsförslag

a) Eftersom det rör sig om tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ räcker det att visa att de tre vektorerna r linjärt oberoende för att se att det är en bas. Antag att det finns tal a, b och c så att $a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2 + c\mathbf{f}_3 = 0$. Vi får då att

$$a\mathbf{e}_1 + b(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + c(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 0$$

dvs

$$(a + b + c)\mathbf{e}_1 - (b - c)\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 = 0$$

Eftersom $\mathbf{e}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$ innebär detta att $a+b+c = b-c = c = 0$, men eftersom $c = 0$ innebär $c - b = 0$ att $b = 0$ och därmed innebär $a + b + c = 0$ att $a = 0$. Vi har kommit fram till att $a = b = c = 0$, vilket visar att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ är linjärt oberoende och därmed en bas för $\mathbb{R}^3$.

b) För att få transformationsmatrisen från basen $\mathbf{e}$ till basen $\mathbf{f}$ behöver vi koordinaterna för basvektorerna i basen $\mathbf{f}$ med avseende på basen $\mathbf{e}$. Detta är precis vad vi har givet i uppgiften i och med att $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Därmed är transformationsmatrisen

$${}_{\mathbf{e}}T_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformationsmatrisen för det omvända basbytet ges av inversen till denna matris och vi kan invertera den genom Gauss-Jordanelimination som ger

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_3 \\ -r_2 - 2r_3 \\ r_3 \end{bmatrix}$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Svar:

b) Båda transformationsmatriserna är

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$