Kontrollskrivning 2, torsdagen 5 augusti. Linjär Algebra

Varje uppgift bedöms med maximalt 3 poäng. Skriv på detta blad.

1. För vilka tal t har ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z & = & -4 \\ 2tx - 2 & = & z - y \end{cases}$$

där $z = x + 2y$, en unik lösning?

2. Beräkna determinanten till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Ge ett exempel på en (3×3)-matris $A = (a_{i,j})$ där $a_{i,j} = 0$ om $i < j$, och där $A^3 = 0$, men där $A^2 \neq 0$.

Namn och personnummer.

Uppgift 1. Ekvationssystemet är

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2(x + 2y) &= -4 \\ 2tx - 2 &= (x + 2y) - y. \end{aligned}$$

På matrisform blir detta

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2t-1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Determinanten till matrisen ä $-1 - 7 \cdot (2t - 1) = 6 - 14t$. För $t \neq \frac{3}{7}$ har systemet en unik lösning.

Ej kompletta lösningar: Ett poäng om det framgår att determinanten (till något system) skall vara nollskilld. Två poäng om svaret är att unik lösning fås vid $t = \frac{3}{7}$, dvs likhet istället för olikhet.

Uppgift 2. Vi gjör föjlande radoperationer

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

som inte ändrar determinanten som vi kan läsa av som 2. Vidare har vi att determinanten till $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ är $4-6 = -2$. Determinanten till matrisen i uppgiften är därmed -4.

Ej kompletta lösningar: Ett poäng om det framgår att determinanten till matrisen är produkten av determinanterna till de två mindre matriserna. Två poäng om determinanten beräknas med korrekt metod, men var det oppstår räknefel.

Uppgift 3. Det första kravet är att matrisen A är nedreetriangular. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

är ett exempel på en matris där $A^2 \neq 0$, och där $A^3 = 0$.

Ej kompletta lösningar: Ett poäng om det framgår att matrisen måste vara nedretriangular.