Kontrollskrivning 5, fredagen 13 augusti. Linjär Algebra

Varje uppgift bedöms med maximalt 3 poäng. Skriv på detta blad.

1. Bestäm egenvärden och egenvektorer till $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$.

2. Låt $\{e_1, e_2\}$ vara en godtycklig bas för $\mathbb{R}^2$, och definiera vektorerna $f_1 = 2e_1 - 3e_2$ och $f_2 = e_2 + 2e_1$. Bestäm koordinaterna för vektorn $v = 4e_1 - 3e_2$ i basen $\{f_1, f_2\}$.

3. Låt L vara en given linje som går genom origo $(0, 0)$. Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara spegling i L. Låt v vara en riktningsvektor för L, och låt n vara en nollskilld vektor som är normal till linjen L. Bestäm matrisrepresentation till T med avseende på basen $\{v, n\}$.

Namn och personnummer.

FACIT: Kontrollskrivning 5, fredagen 13 augusti. Linjär Algebra

Uppgift 1. Det karakteristiska polynomet till A är

$$(t-5)(t+2)+12 = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2),$$

vilket ger egenvärden $t = 1$ och $t = 2$. Egenrummet tillhörande egenvärdet $t = 1$ ges som kärnan av matrisen

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dvs. $u(3, -4)$, godtycklig skalärer u. Egenrummet till $t = 2$ är kärnan till

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix},$$

mao $u(1, -1)$.

Uppgift 2. Vi har relationen

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

vilket ger

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}.$$

Vi innsätter dessa uttryck för e_1 och e_2 i uttrycket

$$v = e_1 - 3e_2 = 4\frac{1}{8}(f_1 + 3f_2) - 3\frac{1}{4}(-f_1 + f_2) = \frac{5}{4}f_1 + \frac{3}{4}f_2.$$

Koordinaterna för v i basen $\{f_1, f_2\}$ är $(\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$.

Uppgift 3. Matrisrepresentationen till avbilndingen T i basen $\{v, n\}$ är

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$