Repetitionskurs i Envariabel Analys
Lösningsförslag till kompletteringstentamen
Lördagen den 14 augusti 2010

Uppgift

Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3e^{4x}+\ln x}{x+e^{4x}+\ln x}$. **(4)**

Lösningsförslag

Den dominerande tärm är e^{4x}, vilket medför att gränsen blir 3.

Svar:

Uppgift

Låt $f(x) = xe^{-x^2}$. Skissera kurvan $y = f(x)$ genom att först göra ett teckenstudium av derivatan och hitta alla lokala extrempunkter. Glöm inte att också beräkna gränsvärdena i $\pm\infty$. **(4)**

Lösningsförslag

Funktionen är negativ för negativa x, och positiv för positiva x. Gränsvärderna i $\pm\infty$ är 0. Extremvärden i $x = \pm\sqrt{2}/2$.

Svar:

Uppgift

Betrakta integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$.

a) Skriv om integralen med hjälp av variabelsubstitutionen $u = \cos x$. **(2)**

b) Beräkna integralen med hjälp av omskrivningen i a). **(2)**

Lösningsförslag

Substitionen $u = \cos(x)$ ger $du = -\sin(x)dx$. Detta ger

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}dx = \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{-1}{u^2} = [\frac{1}{u}]_1^{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2}-1.$$

Svar:

Uppgift

I en tank finns 500 liter vätska i vilken 50 kg salt lösts upp. Vid en viss tidpunkt börjar tanken fyllas på med vätska i en takt av 3 liter per minut, där varje liter innehåller 5 gram salt. Samtidigt tappas den väl blandade vätskan i tanken ut i en takt av 3 liter per minut. Följande matematiska modell har föreslagits för att beskriva förloppet: om $y(t)$ betyder mängden salt (i kg) i tanken vid tidpunkten t minuter efter det att kranarna öppnats så gäller att

$$y'(t) = \frac{15}{100} - \frac{3y(t)}{500}, \qquad y(0) = 50.$$

Lös differentialekvationen ovan och bestäm sedan den lösning som också uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 50$. **(4)**

Lösningsförslag

Vi har att ekvationen $y'(t) = \frac{15}{100} - \frac{3}{500}y(t)$ kan skrivas som

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{\frac{3}{500}t} = e^{\frac{3}{500}t}\frac{15}{100}.$$

Integrering på båda sidor ger

$$y(t)e^{\frac{3}{500}t} = \frac{500}{3} \cdot \frac{15}{100}e^{\frac{3}{500}t} + K,$$

någon konstant K. Detta ger lösningar

$$y(t) = 25 + Ke^{-\frac{3}{500}t}.$$

Initialvärdet $y(0) = 50$ ger att $K = 25$.

Svar:

Uppgift

Låt $f(x) = \sqrt{x + 100}$. Gör följande:

a) Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet kring origo) av grad 2 till $f(x)$. **(1)**

b) Använd det polynom du fick fram i a) för att beräkna ett närmevärde till $\sqrt{104}$ (alltså till $f(4)$). **(1)**

c) Ge hela MacLaurin utvecklingen av $f(x)$. **(2)**

Lösningsförslag

Derivering av funktionen $f(x) = (x+100)^{\frac{1}{2}}$ ger

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+100)^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = \frac{-1}{2\cdot 2}(x+100)^{-\frac{3}{2}}.$$

MacLaurin polynomet av grad 2 blir

$$m(x) = 10 + \frac{1}{20}x + \frac{-1}{8000}x^2.$$

Ett närmevärdet för $\sqrt{104}$ blir

$$m(4) = 10 + \frac{1}{5} - \frac{1}{500}.$$

Ett uttryck för n-te derivatan till $f(x)$ är

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(\frac{1}{2})^n(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3))(x+100)^{-\frac{2n-1}{2}}.$$

MacLaurinutvecklingen blir

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^{n-1}(\frac{1}{2})^n(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3))\frac{x^n}{n!10^{2n-1}}.$$

Svar:

Uppgift

Här får du välja. Lös antingen Alternativ A eller Alternativ B nedan, men inte båda!

Alternativ A

Ur en trädstam i form av en rak cirkulär cylinder med radie 1 ska sågas en balk med rektangulärt tvärsnitt. Böjmotståndet W hos en sådan balk ges av formeln

$$W = \frac{xy^2}{6}$$

där x är bredden och y höjden. Hur ska balken dimensioneras för att böjmotståndet ska bli maximalt? (Ur Persson och Böiers: Övningar i Analys i en variabel) **(4)**

Alternativ B

En tråd är spänd mellan punkterna 1 och 2 på x-axeln, graderingen är i meter. Trådens densitet ges av $\rho(x) = x^2$ kilogram per meter. Bestäm trådens totala massa. (Ur Persson och Böiers: Övningar i analys i en variabel) **(4)**

Lösningsförslag

I det rektangulära snitt har vi att om x-värdet är bestämd, då blir $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Detta insatt i böjmotsåndet W ger

$$W = \frac{xy^2}{6} = \frac{1}{6}(x(1-x^2)),$$

som en funktion av envariabel x. Derivering ger

$$W'(x) = \frac{1}{6}(1-x^2) + x(-2x)).$$

Ekvationen $W'(x) = 0$ ger $1 = 3x^2$ som har lösning $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Svar 6b

Den totala massan ges vid integralen

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}[x^3]_1^2 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}.$$

Svar: