Kontrollskrivning 4, onsdagen 11 augusti. Envariabel Analys

Varje uppgift bedöms med maximalt 3 poäng. Skriv på detta blad.

1. Lös initialvärdesproblemet $y''(t) + 4y(t) = 0 \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$

2. Strömmen $i(t)$ i en viss krets vid tiden t kan beskrivas med differentialekvationen

$$E = Ri + L\frac{di}{dt},$$

där E, R och L är positiva konstanter. Bestäm $i(t)$, om dessutom begynnelsevillkoret $i(0) = 0$ är uppfyllt.

3. Förklara varför volymen V av den rotationskropp som uppstår då området mellan x-axeln och kurvan $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, roterar kring x-axeln ges av formeln $V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$ (f antas kontinuerlig på intervallet $[a, b]$). Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området mellan x-axeln och kurvan $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, roterar kring x-axeln.

Namn och personnummer.

FACIT till Kontrollskrivning 4, onsdagen 11 augusti. Envariabel Analys

Uppgift 1. Ekvationen $\lambda^2 + 4 = 0$ har lösningar $\pm 2i$, där $i = \sqrt{-1}$. De reella lösningarna till differentialekvationen $y''(t) + 4y(t) = 0$ blir därmed $A\cos(2x) + B\sin(2x)$. Initialvärderna $y(0) = 2$ och $y'(0) = 1$ ger ekvationerna

$$A + 0 = 2$$

$$0 + 2B = 1.$$

Lösningen till initialvärdeproblemet blir

$$2\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Uppgift 2. Vi har ekvationen $\frac{E}{L} = \frac{R}{L}i + i'$, vilket multiplicerad med $e^{\frac{R}{L}t}$ ger oss ekvationen

$$\frac{E}{L} \cdot e^{\frac{R}{L}t} = \frac{d}{dt}(e^{\frac{R}{L}t}i(t)).$$

Integrering på båda sidor ger

$$\frac{E}{L} \cdot \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} + K = e^{\frac{R}{L}t}i(t).$$

Konstant K. Vi har $i(t) = \frac{E}{R} + e^{-\frac{R}{L}t}K$. Initialvärdet $i(0) = 0$ ger slutligen

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{\frac{R}{L}t}).$$

3. Volymen till en rotationskropp tänker vi som summan av cylinderskivor $C(x_i)$, där $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ är en partition av intervallet vi tar volymen över. Varje cylinderskiva har höjd som approximeras med $f(x_i)$, vilket ger att cylinderskivan $C(x_i)$ volym approximeras vid $\pi \cdot f(x_i)^2 \cdot (x_i - x_{i-1})$. Summan

$$\pi \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)^2 (x_i - x_{i-1})$$

ger en approximation av volymen till rotationskroppen. Finare partition av intervallet ger en sekvens av tal som konvergerar mot vad vi definierar som volymen till rotationskroppen. Per definition är också detta lika med integralen

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$