Kontrollskrivning 3, måndagen 9 augusti. Envariabel Analys

Varje uppgift bedöms med maximalt 3 poäng. Skriv på detta blad.

1. Använd substitutionen $t = 1 - \cos x$ för att beräkna integralen $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1-\cos x}\, dx$.

2. Använd partiell integration för att beräkna integralen $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$.

3. Beräkna integralen $\int_0^1 \frac{2x+5}{x^2+3x+2}\, dx$

Namn och personnummer.

Uppgift 1. Vi sätter $t = 1 - \cos(x)$. Detta ger $dt = \sin(x)dx$, och

$$1 - \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

Substitionen $t = 1 - \cos(x)$ ger att integralen $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} dx$ blir

$$\int_{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}^{1} = -\ln(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}).$$

Ej kompletta lösningar: Korrekt svar förutom integrationsgränser, 2 poäng.

Uppgift 2. Vi löser integralen $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$ vid partiell integrering. Vi har att

$$\int f'g = fg - \int fg',$$

och använder detta med $f' = x^2, g = \ln(x)$. Detta ger

$$\int x^2 \ln(x)\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x}.$$

Den sista integralen har lösning $\frac{1}{9}x^3$. Vi har således att

$$\int_1^2 x^2 \ln(x) dx = [\frac{1}{3}x^3 \ln(x)]_1^2 - [\frac{1}{9}x^3]_1^2 = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}.$$

Ej kompletta lösningar: Ett poäng om regeln för partiell integration fremvisas, även om personen inte vet hur den tillämpas.

Uppgift 3. Vi vill skriva

$$\frac{2x + 5}{x^2 + 3x + 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)},$$

vilket ger ekvationerna $Ax + Bx = 2x$ och $2A + B = 5$. Detta har lösningarna $A = 3$ och $B = -1$. Den ursprungliga integralen blir

$$\int_0^1 \frac{3}{x + 1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x + 2} dx = 3\ln(x + 1) - \ln(x + 2)$$

Svaret blir $3\ln(2) - \ln(3) + \ln(2) = 4\ln(2) - \ln(3)$.

Ej kompletta lösningar: Två poäng om felaktiga A och B erhållits. Ett poäng om korrekt ansats, men felaktig eller ofullständig lösta A och B.