Kontrollskrivning 2, torsdagen 5 augusti. Envariabel Analys

Varje uppgift bedöms med maximalt 3 poäng. Skriv på detta blad.

1. Bestäm det största respektive minsta värdet som funktionen $f(x) = xe^{-x^2}$ antar.

2. Låt $f(x) = \tan x$. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(x_0, y_0) = (\pi/3, \sqrt{3})$.

3. En 10 meter lång stege lutar mot en vägg. Stegens nederdel rör sig från väggen med en hastighet av 2 meter per sekund. Hur snabbt faller stegens överdel i det ögonblick då dess nederdel befinner sig 6 meter från väggen?

Namn och personnummer.

Uppgift 1. Derivering ger

$$f'(x) = \exp(-x^2) + x\exp(-x^2)(-2x) = \exp(-x^2)(1-2x^2).$$

Extremvärden får vi när $f'(x) = 0$, vilket ger att $1 - 2x^2 = 0$. Med andra ord när $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Dessa lokala extremvärden är globala: Funktionen är noll i $x = 0$ och går mot noll när x går mot oändligheten, liknande för negativa x. Funktionens maxvärde blir

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\exp(-\frac{1}{2})}{\sqrt{2}}.$$

Minimum får vi till $f(\frac{-1}{\sqrt{2}}) = -f(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Ej kompletta lösningar: Ett poäng om det framgår att extremvärden fås vid $f'(x) = 0$.

Uppgift 2. Derivering av $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ger

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(x)} + \cos^{-2}\sin^2 = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Lutningen till tangentlinjen till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})$ ges av

$$f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{3})} = 4.$$

En ekvation till tangentlinjen blir därmed

$$y = 4x + (\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}).$$

Ej kompletta lösningar: Ett poäng om det framgår att lutningen fås vid $f'(P)$, där P är punkten på kurvan.

Uppgift 3. Vi tänker oss att stegens nedre del rör sig i x-led, och att stegens övre del rör sig i y-led. Om, vid en given tid t, stegens nedre del har placering $x(t)$, då följer det av Pytagoras Sats att stegens övre del har placering

$$y(t) = \sqrt{10^2 - x^2(t)}.$$

Hastigheten til stegens övre del blir

$$y'(t) = \frac{1}{2}(100 - x^2(t))^{-\frac{1}{2}}(-2x(t)\cdot x'(t)) = \frac{-x(t)\cdot x'(t)}{\sqrt{100 - x^2(t)}}.$$

Av uppgiften har vi att hastigheten i x-led är konstant $x'(t) = 2$, och specielt har vi att vi tiden $t = t_0$ när $x(t_0) = 6$ att

$$y'(t_0) = \frac{-12}{\sqrt{100-36}} = -\frac{3}{2}.$$