Kontrollskrivning 5, fredagen 13 augusti. Envariabel Analys

Varje uppgift bedöms med maximalt 3 poäng. Skriv på detta blad.

1. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring $x_0 = 3$, till $x\sqrt{x+1}$.

2. Beräkna, t ex med hjälp av Maclaurinutveckling, gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{x^2}$$

3. Använd Maclaurinpolynomet av grad 2 till $g(x) = \exp^x$ för att beräkna ett närmevärde till $\sqrt{e}$ $(= g(1/2))$. Visa att närmevärdet har ett fel som till absolutbeloppet är mindre än 0.1

Namn och personnummer.

Uppgift 1. Vi Taylorutvecklar $\sqrt{x+1}$ av grad 1, omkring $x=3$:

$$f(x)=\sqrt{x+1}, \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

Taylorpolynomet blir $f(x)=2+\frac{1}{4}(x-3)+O(2)$. Funktionen $g(x)=x$ utvecklad omkring $x=3$ är $3+1\cdot(x-3)$. Taylorpolynomet till $x\sqrt{x+1}$ omkring punkten $x=3$ torde då bli

$$\begin{aligned}&(3+(x-3))(2+\frac{1}{4}(x-3)+O(2))\\ =&6+\frac{3}{4}(x-3)+2(x-3)+\frac{1}{4}(x-3)^2+O(2)\\ =&6+\frac{11}{4}(x-3)+\frac{1}{4}(x-3)^2+O(2).\end{aligned}$$

Uppgift 2. V innsätter MacLauringpolynomen i det sökta uttrycket och får att nämnaren blir

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Summerad upp ser detta ut som

$$2\cdot\frac{x^2}{2!}+2\cdot\frac{x^3}{3!}+2\cdot\frac{x^6}{6!}+2\cdot\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

Det följer nu att den sökta gränsen blir 1.

Uppgift 3. MacLaurinpolynomet av grad två till $g(x)=\exp(x)$ är $1+x+\frac{1}{2}x^2$. Ett närmevärde till $\sqrt{\exp}$ blir

$$\exp(\frac{1}{2})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}=\frac{13}{8}.$$

Felet i närmevärdet är $\frac{1}{3!}(\frac{1}{2})^3+\frac{1}{4!}(\frac{1}{2})^4+\cdots+$. Vi vill estimera detta fel. Vi har

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3!}(\frac{1}{2})^3+\frac{1}{4!}(\frac{1}{2})^4\\ =&(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}(\frac{1}{2})+\frac{1}{5!}(\frac{1}{2})^2+\cdots)\\ \leq&(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots)\\ =&(\frac{1}{2})^3(-\frac{5}{2}+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots)\\ =&(\frac{1}{2})^3(-\frac{5}{2}+\exp(0))\\ \leq&\frac{1}{8}(3-\frac{5}{2})=\frac{1}{8}(\frac{1}{2})=\frac{1}{16}<\frac{1}{10}.\end{aligned}$$