Kontrollskrivning 4, onsdagen 11 augusti. Amelia

Varje uppgift bedöms med maximalt 3 poäng. Skriv svar på detta blad.

1. Lös initialvärdesproblemet $y''(t) + 4y(t) = 0 \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$

2. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring punkten $x_0 = 3$ till $f(x) = x\sqrt{x+1}$.

3. Strömmen $i(t)$ i en viss krets vid tiden t kan beskrivas med differentialekvationen

$$E = Ri + L\frac{di}{dt},$$

där E, R och L är positiva konstanter. Bestäm $i(t)$, om dessutom begynnelsevillkoret $i(0) = 0$ är uppfyllt.

Namn och personnummer.

FACIT till Kontrollskrivning 4, onsdagen 11 augusti. Amelia

Uppgift 1. Ekvationen $\lambda^2 + 4 = 0$ har lösningar $\pm 2i$, där $i = \sqrt{-1}$. De reella lösningarna till differentialekvationen $y''(t) + 4y(t) = 0$ blir därmed $A\cos(2x) + B\sin(2x)$. Initialvärderna $y(0) = 2$ och $y'(0) = 1$ ger ekvationerna

$$A + 0 = 2$$
$$0 + 2B = 1.$$

Lösningen till initialvärdeproblemet blir

$$2\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Uppgift 2. Vi Taylorutvecklar $\sqrt{x+1}$ av grad 1, omkring $x = 3$:

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

Taylorpolynomet blir $f(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) + O(2)$. Funktionen $g(x) = x$ utvecklad omkring $x = 3$ är $3 + 1 \cdot (x-3)$. Taylorpolynomet till $x\sqrt{x+1}$ omkring punkten $x = 3$ torde då bli

$$\begin{aligned}
&(3 + (x-3))(2 + \frac{1}{4}(x-3) + O(2)) \\
=&6 + \frac{3}{4}(x-3) + 2(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + O(2) \\
=&6 + \frac{11}{4}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + O(2).
\end{aligned}$$

Uppgift 3. Vi har ekvationen $\frac{E}{L} = \frac{R}{L}i + i'$, vilket multiplicerad med $e^{\frac{R}{L}t}$ ger oss ekvationen

$$\frac{E}{L} \cdot e^{\frac{R}{L}t} = \frac{d}{dt}(e^{\frac{R}{L}t}i(t)).$$

Integrering på båda sidor ger

$$\frac{E}{L} \cdot \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} + K = e^{\frac{R}{L}t}i(t).$$

Konstant K. Vi har $i(t) = \frac{E}{R} + e^{-\frac{R}{L}t}K$. Initialvärdet $i(0) = 0$ ger slutligen

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{\frac{R}{L}t}).$$