Kontrollskrivning 3, måndagen 9 augusti. Amelia

Varje uppgift bedöms med maximalt 3 poäng. Skriv svar på detta blad.

1. Bestäm det största respektive minsta värdet som funktionen $f(x) = x \exp^{-x^2}$ antar.

2. Låt $f(x) = \tan x$. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(x_0, y_0) = (\pi/3, \sqrt{3})$.

Uppgift 3. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2^x+\ln x}{x^2+3^x}$.

Namn och personnummer.

FACIT till Kontrollskrivning 3, måndagen 9 augusti. Amelia

1. Derivering ger

$$f'(x) = \exp(-x^2) + x\exp(-x^2)(-2x) = \exp(-x^2)(1-2x^2).$$

Extremvärden får vi när $f'(x) = 0$, vilket ger att $1 - 2x^2 = 0$. Med andra ord när $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Denna lokal extrempunkt är också en global extrempunkt; funktionen är negativ för negativa x, och funktionsvärdet går mot noll när x växer. Funktionens maxvärde blir

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\exp(-\frac{1}{2})}{\sqrt{2}}.$$

Minimum får vi till $f(\frac{-1}{\sqrt{2}}) = -f(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

2. Derivering av $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ger

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(x)} + \cos^{-2}\sin^2 = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Lutningen till tangentlinjen till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})$ ges av

$$f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{3})} = 4.$$

En ekvation till tangentlinjen blir därmed

$$y = 4x + (\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}).$$

3. Vi har att $x^3/3^x$ och $\ln(x)/3^x$, samt att $2^x/3^x = (2/3)^x$ går alla mot noll när x växer. Detta ger

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 2^x + \ln(x)}{x^2 + 3^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{2^x}{3^x} + \frac{\ln(x)}{x^3}}{\frac{x^2}{3^x} + 1} = 0.$$