
Kontrollskrivning 1, tisdagen 3 augusti. Amelia

Varje uppgift bedöms med maximalt 3 poäng. Skriv svar på detta blad.

1. För vilka tal t har ekvationssystemet

$$-x + 3y + 2z = -4$$

$$2tx - 2 = z - y$$

där $z = x + 2y$, unik lösning?

2. Beräkna determinanten till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Skriv vektorn $(2, 3)$ som en sum av vektorerna $(-1, 4)$ och $(2, 1)$.

Namn och personnummer.

 FACIT till Kontrollskrivning 1, tisdagen 3 augusti. Amelia

Uppgift 1. Ekvationssystemet är

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2(x + 2y) &= -4 \\ 2tx - 2 &= (x + 2y) - y. \end{aligned}$$

På matrisform blir detta

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2t - 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Determinanten till matrisen är $-1 - 7 \cdot (2t - 1) = 6 - 14t$. För $t \neq \frac{3}{7}$ har systemet en unik lösning.

Ej kompletta lösningar: Ett poäng om det framgår att determinanten (till något system) skall vara nollskilld. Två poäng om svaret är att unik lösning fås vid $t = \frac{3}{7}$, dvs likhet istället för olikhet.

Uppgift 2. Vi gör följande radoperationer

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

som inte ändrar determinanten som vi kan läsa av som 2. Vidare har vi att determinanten till $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ är $4 - 6 = -2$. Determinanten till matrisen i uppgiften är därmed -4 .

Ej kompletta lösningar: Ett poäng om det framgår att determinanten till matrisen är produkten av determinanterna till de två mindre matriserna. Två poäng om determinanten beräknas med korrekt metod, men var det uppstår räknefel.

Uppgift 3. För att skriva vektorn $(2, 3)$ som en linjär kombination av vektorerna $(-1, 4)$ och $(2, 1)$ måste vi lösa ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi inverterar (2×2) -matrisen och får att

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Detta ger $s = \frac{4}{9}$ och $t = \frac{11}{9}$.

Ej kompletta lösningar: Ett poäng om det framgår att studenten vet vad frågan handlar om, dvs hitta skalärer s, t sådan att den sökta vektoren kan skrivas $s(-1, 4) + t(2, 1)$.