Modul 5: Basbyten, Egenvärden och diagonalisering, Kvadratiska former

1. Undersök vilka av följande matriser beskriver en transformation mellan två baser:

   a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Bestäm transformationsmatrisen för övergången från

   a. basen $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ till basen $\boldsymbol{f} = \{2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, 4\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2\}$ (den nya basen $\boldsymbol{f}$ består alltså av vektorerna $\boldsymbol{f}_1$ och $\boldsymbol{f}_2$ med koordinaterna (2,3) respektive (4,5) i den gamla basen $\boldsymbol{e}$).

   b. basen $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$ till basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$.

   c. basen $\{\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$ till basen $\{\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2, 3\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2\}$.

3. a. Vektorn $\boldsymbol{v}$ har i basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ koordinaterna (2,1). Vilka är koordina terna för $\boldsymbol{v}$ i basen $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$?

   b. Vektorn $\boldsymbol{v}$ har i basen $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$ koordinaterna (3,4). Vilka är koordinaterna för $\boldsymbol{v}$ i basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$?

4. I xy–planet införs nya uv–koordinater genom att man tar vektorerna $\boldsymbol{f}_1 = (1,3)$ och $\boldsymbol{f}_2 = (2,1)$ som nya basvektorer. Vilken är ekvationen i det nya koordinatsystemet för den räta linje som i det ursprungliga systemet har ekvationen $2x + y = 5$?

5. I xy–planet införs nya uv–koordinater genom att man tar vektorerna $\boldsymbol{f}_1 = (1,2)$ och $\boldsymbol{f}_2 = (2,5)$ som nya basvektorer. En rät linje har i det nya systemet ekvationen $u + v = 1$. Vilken är linjens ekvation i det ursprungliga systemet?

6. I $\mathbf{R}^2$ med basvektorer $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ väljs vektorerna med koordinaterna (4,3) respektive (3,2) som nya basvektorer $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$.

   a. Vilka är koordinaterna i det nya systemet för den $\boldsymbol{v}$ vektor som i det gamla systemet har koordinaterna (2,1)?

   b. Vilka är koordinaterna i det gamla systemet för den $\boldsymbol{v}$ vektor som i det nya systemet har koordinaterna (1,–1)?

   c. Vilken är ekvationen i det nya systemet för den räta linje som i det gamla systemet har ekvationen $x - y = 2$?

7. Undersök vilka av följande matriser beskriver en ON–transformation mellan två baser:

a. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. c. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

d. $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 2 & -11 & 10 \\ 14 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

8. En linjär avbildnig har i basen $\boldsymbol{e}$ matrisen $\boldsymbol{A_e}$ och i basen $\boldsymbol{f}$ matrisen $\boldsymbol{A_f}$. Bestäm

a. $\boldsymbol{A_f}$ om $\boldsymbol{A_e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2\}$.

b. $\boldsymbol{A_e}$ om $\boldsymbol{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2\}$.

c. $\boldsymbol{A_e}$ om $\boldsymbol{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{f}_1 + 3\boldsymbol{f}_2, 2\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_2\}$.

d. $\boldsymbol{A_f}$ om $\boldsymbol{A_e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{f}_1 + 3\boldsymbol{f}_2, 2\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_2\}$.

9. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser:

a. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser:

a. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. $\boldsymbol{A}$ är matrisen i uppgiften 9. Undersök $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar. Om så är fallet bestäm en matris $\boldsymbol{C}$ som diagonaliserar matrisen $\boldsymbol{A}$ och ange $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}$.

12. Undersök om man kan bilda en bas i $\mathbf{R}^2$ bestående av egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Om så är fallet ange en sådan bas.

13. Vilka av följande matriser är ON–diagonaliserbara?

a. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

14. Visa att matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar och bestäm $\boldsymbol{A}^{10}$.

15. Undersök om $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar. Om så är fallet bestäm matris $\boldsymbol{C}$ som diagonaliserar matrisen $\boldsymbol{A}$ och ange $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

a. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. b. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. c. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Skriv på huvudaxelform och bestäm vilken typ av kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen

a. $6x^2 - 4xy + 9y^2 = 5$.

b. $4xy + 3y^2 = 1$.

c. $2y^2 + 4xy - x^2 = 1$.

17. Skriv på huvudaxelform och bestäm vilken typ av kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen

a. $x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 8y = 1$.

b. $x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y = 1$.

c. $x^2 - 2xy + y^2 + 12\sqrt{2}\,x = 8$.

18. Beräkna arean innanför ellipsen $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 1$. Det anses känt att arean innanför ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ är lika med πab.

Svar:

1. Endast matrisen i c.

2. a. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a. (3,–1) b. (7,11).

4. $u + v = 1$.

5. $3x - y = 1$.

6. a. (–1,2) b. (1,1) c. $u + v = 2$

7. Endast matriser i c och d.

8. a. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ b. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ d. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$

9. a. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\boldsymbol{v}_1 = (0,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,2)$.
   b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\boldsymbol{v} = (3,2)$.
   c. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\boldsymbol{v}_1 = (1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1)$.

10. a. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $\boldsymbol{v}_1 = (1,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,0,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,-1,0)$.
    b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$, $\boldsymbol{v}_1 = (-1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,1,1)$.
    d. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, $\boldsymbol{v}_1 = (-2,-3,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,1,0)$.

11. b men inte a.

12. Det kan man inte.

13. b men inte a.

14. $\boldsymbol{A}^{10} = \begin{pmatrix} 512 & 512 & -512 \\ 511 & 513 & -512 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. a. T.ex $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
    b. Ej diagonaliserbar.
    c. T.ex $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

16. a. $2x^2 + y^2 = 1$, ellips.
    b. $4x^2 - y^2 = 1$, hyperbel.
    c. $3x^2 - 2y^2 = 1$, hyperbel.

17. a. $3u^2 - v^2 = 1$, hyperbel.
    b. $u^2 + 3v^2 = 10$, ellips.
    c. $v = u^2/6$, parabel.

18. $\pi/\sqrt{6}$.