Modul 4:
Vektorer i $\mathbb{R}^n$ och linjära avbildningar. Minsta kvadratmetod.

1. Två linjära avbildningar T och S, av typen $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, ges enligt följande: $T(x,y) = (x+y,\ x-y)$ och $[S] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Bestäm matriserna för avbildningarna

   $\frac{1}{2} T \cdot S$ och $\frac{1}{2} S \cdot T$ samt tolka dessa geometriskt.

2. För en linjär avbildning T: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $T(2,-1) = (1,3)$ och $T(-1,1) = (1,1)$. Bestäm matrisen $[T]$ för T.
   Tips: Antag att $[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   Lös ekvationssystemet $[T]\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $[T]\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Låt $T_{\boldsymbol{A}}$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ vara multiplikation med matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Undersök om $\boldsymbol{v} = (1,1,0)$ tillhör bilden av $\mathbf{R}^2$ (dvs undersök om det finns någon vektor $\boldsymbol{u}$ i $\mathbf{R}^2$ sådan att $T_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$.

   b. Undersök om $\boldsymbol{v} = (1,1,1)$ tillhör bilden av $\mathbf{R}^2$.

   c. Visa att varje punkt (x_1, x_2) avbildas på en punkt (w_1, w_2, w_3) som ligger i planet $w_1 - w_2 + w_3 = 0$.

   d. Visa att varje punkt i planet $w_1 - w_2 + w_3 = 0$ är bild av någon punkt i $\mathbf{R}^2$. (c och d tillsammans innebär att hela $\mathbf{R}^2$ avbildas på hela planet $w_1 - w_2 + w_3 = 0$ eller, som man säger, planet är bilden av $\mathbf{R}^2$.)

   e. Visa att $T_{\boldsymbol{A}}$ är en–entydigt (dvs visa att om $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$ så är $T_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}) \neq T_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{v})$. Observera att det räcker att visa att $T_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.)

4. En avbildning T: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ges av

   $$T(x,y,z) = (x + 2y + z,\ x^k + y + 2z,\ 2x + 3y + 3z).$$

   a. Bestäm k så att T blir en linjär avbildning.

   För detta k–värde

   b. Bestäm standardmatrisen $[T]$.

   c. Verifiera att $T(2,1,0) = (4,3,7)$.

   d. Bestäm alla vektorer $\boldsymbol{v}$, sådana att $T(\boldsymbol{v}) = (4,3,7)$.

   e. Ange, som en slutsats av resultatet i d., värdet av $\det([T])$.

f. Finns det någon vektor $\boldsymbol{v}$ sådan att $T(\boldsymbol{v}) = (3,7,4)$?

5. Låt $T_{\boldsymbol{A}}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara multiplikation med matrisen $\boldsymbol{A}$. Undersök om $T_{\boldsymbol{A}}$ är inverterbar och om så är fallet bestäm inversen till $T_{\boldsymbol{A}}$ då

a. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. b. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Undersök om vektorn $(2,1,0,-1)$ tillhör värdemängden av avbildningen $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, där $T(x,y,z) = (2x + y + z,\ x - y + 2z,\ y - z,\ x + 2y + z)$.

7. Undersök sanningshalten i följande påståenden:

För varje linjär avbildning $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ och för godtyckliga vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ i $\mathbf{R}^2$ gäller att

a. Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är ortogonala så är också $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ ortogonala.

b. Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ inte är ortogonala så är heller inte $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ ortogo nala.

c. Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ inte är parallella så är heller inte $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ paral lella.

d. Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är parallella så är också $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ parallella.

8. Låt $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara rotationen moturs med vinkel $\pi/4$. Bestäm bilden av

a. punkten $(2,4)$.

b. linjen $y = 2x$.

c. ellipsen $9x^2 + y^2 = 1$.

d. hyperbeln $9x^2 - y^2 = 1$.

e. parabeln $y = x^2$.

9. a. Visa att vektorn $\boldsymbol{u} = (1,2,3,4)$ är en linjär kombination av vektorerna $\boldsymbol{v} = (1,2,2,3)$ och $\boldsymbol{w} = (1,2,1,2)$. (Dvs. visa att det finns konstanter a och b sådana att $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}$.)

b. Är vektorn $\boldsymbol{u} = (2,3,4,5)$ en linjär kombination av vektorerna $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$?

10. Avgör om följande vektorer är linjärt oberoende eller ej:

a. $(1,3,2,2)$, $(1,0,-1,1)$, $(1,1,0,0)$. (Vektorerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ är linjärt oberoende □ om likheten $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ inträffar endast för $a = b = c = 0$.)

b. $(1,3,2,-2)$, $(1,0,-1,1)$, $(1,1,0,0)$.

c. $(1,3,2)$, $(2,1,1)$.

d. $(1,3,2)$, $(2,1,1)$, $(3,4,3)$.

e. $(1,3,2)$, $(2,1,1)$, $(3,4,2)$.

f. (1,3,2), (2,1,1), (3,4,2), (3,4,3).

11. Undersök om vektorerna c.–f. i uppgiften 10 bildar en bas i $\mathbf{R}^3$.

12. För en linjär avbildning $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $T(1,1) = (3,7)$ och $T(2,1) = (4,10)$. Bestäm $T(1,2)$.

13. För en linjär avbildning $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $T(1,1) = (7,3)$ och $T(2,1) = (10,4)$. Bestäm den vektor (vektorer) $\boldsymbol{v}$ för vilken $T(\boldsymbol{v}) = (4,2)$.

14. Bestäm matrisen $[T]$ för den linjära avbildningen $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ för vilken att $T(\mathbf{e}_x) = (1,3,2)$, $T(\mathbf{e}_y) = (1,2,1)$ och $T(2,1,-1) = (2,7,4)$.

15. Ange en minstakvadratlösning till ekvationssystemet

a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 0 \\ 2x - y = 11 \\ x - y = 0 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 7 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$

16. Ange ekvationen för den räta linje $y = ax + b$ som i minstakvadratmening bäst anpassar till punkterna $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ och $(2,2)$..

<u>Svar:</u>

1. $\frac{1}{2}\, T \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ är spegling m.a.p. x–axeln.

$\frac{1}{2}\, S \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ är spegling m.a.p. linjen $x = y$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

3. a. Ja. b. Nej.

4. a. $k = 1$. b. $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

d. $\boldsymbol{v} = (2 - 3t, t + 1, t)$. e. 0. f. Nej.

5. a. Ej inverterbar.

   b. Inverterbar och $T_A^{-1}(x,y,z) = T_{A^{-1}}(x,y,z) = (z - x, x + y - 2z, x - y + z)$.

6. Tillhör värdemängden.

7. a. Lögn! Om T är projektionen på x–axeln samt $\boldsymbol{u} = (1,1)$ och $\boldsymbol{v} = (1,-1)$, så är $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ ortogonala, men $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ inte.

   b. Lögn! Om T är projektionen på x–axeln samt $\boldsymbol{u} = (1,1)$ och $\boldsymbol{v} = (0,1)$, så är $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ inte ortogonala, medan $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ är det.

   c. Lögn! Exempel i svaret till a visar att $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ kan vara parallella även om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ inte är det.

   d. Sant! Antag att $[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{u} = (x,y)$. Om $\boldsymbol{v}$ är parallell med $\boldsymbol{u}$ så är $\boldsymbol{v} = (tx,ty)$ för något tal t. Verifiera att $T(\boldsymbol{v}) = tT(\boldsymbol{u})$, dvs $T(\boldsymbol{u})$ och $T(\boldsymbol{v})$ är parallella.

8. a. $(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$. b. $w_2 = -3w_1$.

   c. $5w_1^2 + 8w_1w_2 + 5w_2^2 = 1$. d. $4w_1^2 + 10w_1w_2 + 4w_2^2 = 1$.

   e. $w_1^2 + 2w_1w_2 + w_2^2 + \sqrt{2}\, w_1 - \sqrt{2}\, w_2 = 0$.

9. b. Nej.

10. a. linjärt oberoende. b. linjärt beroende.
    c. linjärt oberoende. d. linjärt beroende.
    e. linjärt oberoende. f. linjärt beroende.

11. c. bildar inte en bas. d. bildar inte en bas.
    e. bildar en bas. f. bildar inte en bas.

12. (5,11).

13. (0,1).

14. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

15. a. $x = 4$, $y = 1$.

    b. t.ex $x = 1, y = 2, z = 0$. (Allmän minstakvadratlösning $(1 - t, 2 - t, t)$.)

16. $y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{10} + \frac{\sqrt{5}}{10}$.