

Modul 3

Vektorer och skalärprodukt, Vektorprodukt, linjer & plan

- Är punkterna $(3,7,-2)$, $(5,5,1)$, $(6,-2,2)$ och $(4,0,-1)$ hörn i en parallelogram?
- Bestäm talet a så att
 - vektorerna $\mathbf{u} = (a,2,a+2)$ och $\mathbf{v} = (a+1,a+3,6)$ är parallella.
 - vektorerna $\mathbf{u} = (a,a,a+2)$ och $\mathbf{v} = (a+1,a+3,a-3)$ är ortogonala.
 - vektorerna $\mathbf{u} = (1,1,0)$ och $\mathbf{v} = (a,a-1,a)$ bildar vinkel $\pi/4$.
- Visa att vektorerna $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ är ortogonala om och endast om vektorerna \mathbf{u} och \mathbf{v} har samma längd.
- Kraften $\mathbf{F} = (9,4,5)$ påverkar en kropp belägen i punkten $P = (2,0,0)$. Kroppen rör sig rätlinjigt mot punkten $Q = (3,2,2)$. Hur stor är kraften i vägens riktning?
- Uppdela vektorn $(3,2,-1)$ i två vinkelräta komponenter, av vilka den ena är parallell med vektorn $(2,1,2)$.
- Låt $\mathbf{u} = (1,1,2)$ och $\mathbf{v} = (2,1,1)$. Beräkna
 - $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
 - $\mathbf{v} \times 2\mathbf{u}$
 - $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}$
 - $\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}$
- Beräkna arean av triangeln ABC då $A = (2,2,1)$, $B = (2,3,2)$ och $C = (6,5,2)$.
 - Ligger punkten $D = (4,5,3)$ i det plan som går genom punkterna A, B, C ?
- En parallelepiped har fyra av sina hörn i punkterna $(1,1,2)$, $(2,1,0)$, $(0,1,1)$ och $(1,2,3)$. Beräkna dess volym.
- Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkterna $(1,1,2)$, $(2,2,1)$ och $(1,0,1)$. Beräkna också avståndet från punkten $(6,-1,2)$ till detta plan.
- Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkten $(3,1,0)$ och linjen $\mathbf{r}(t) = (1-t, 1+t, 1+t)$.
- Ett plan går genom punkten $(2,1,3)$ och är parallell med planet $x - 2y + z = 1$. Bestäm planets ekvation.
- Ett plan går genom punkten $(2,1,3)$ och är vinkelrätt mot linjen $\mathbf{r}(t) = (t+1, 1+2t, 2t+1)$. Bestäm planets ekvation.
- Linjen L går genom punkterna $(1,1,0)$ och $(2,2,1)$. Linjen K går genom punkten $(2,3,4)$ och är parallell med linjen L . Bestäm de båda linjernas ekvationer.
- Linjen L går genom punkterna $(1,1,2)$ och $(2,2,1)$. Linjen K går genom punkten $(1,1,5)$ och skär linjen L under rät vinkeln. Bestäm de båda linjernas ekvationer.

15. Ett plan går genom punkten $(2,1,3)$ och är parallell med de båda linjerna $\mathbf{r}(t) = (t + 1, 1 + 2t, 2t + 1)$ och $\mathbf{p}(t) = (2t + 3, 2 + t, t + 2)$. Bestäm planets ekvation.
16. Bestäm ekvationen för skärningslinjen mellan planen $3x + y + 2z = 1$ och $x - 2y + z = 0$.
17. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller linjen $\mathbf{r}(t) = (1, t, t + 1)$ och som är vinkelrät med planet $2x + 2y + z = 3$.
18. Ett plan, P , ligger på avståndet 1 från planet $2x + 3y + 6z = 7$. Bestäm P 's ekvation.
19. Beräkna avståndet mellan linjen $\mathbf{r}(t) = (1 + 3t, 3 + t, -2t)$ och planet $x - y + z = 4$.

Svar:

1. Ja.
2. a. 1. b. -2 eller 1. c. 2.
4. $(3,6,6)$.
5. $\frac{2}{3}(2,1,2)$ och $\frac{1}{3}(5,4,-7)$.
6. a. $(-1,3,-1)$ b. $(2,-6,2)$ c. $(7,1,-4)$ d. $(-1,3,-1)$
7. a. 3. b. Ja.
8. 6.
9. $2x - y + z = 3$, $2\sqrt{6}$.
10. $x - y + 2z = 2$.
11. $x - 2y + z = 3$.
12. $x + 2y + 2z = 10$.
13. $L: (x,y,z) = (1 + t, 1 + t, t)$. $K: (x,y,z) = (2 + t, 3 + t, 4 + t)$.
14. $L: (x,y,z) = (2 - t, 2 - t, 1 + t)$. $K: (x,y,z) = (t, t, 2t + 3)$.
15. $z - y = 2$.
16. $\mathbf{r}(t) = (1 - 5t, t, 7t - 1)$.
17. $x - 2y + 2z = 3$.
18. $2x + 3y + 6z = 0$ eller $2x + 3y + 6z = 14$.
19. $2\sqrt{3}$.