Modul 2: Gausselimination –Matriser–Determinanter

1. Lös ekvationssystemet

a. $\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ 3x + y + z = 12 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3x + y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ 3x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = -14 \end{cases}$

2. För vilka värden på konstanter a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = -8 \\ x + z = 2 \\ 3x + 3y + az = b \end{cases}$$

precis en lösning? Oändligt många lösningar? Ingen lösning?

3. Lös för alla a–värden ekvationssystemet $\begin{cases} -2x + y + 2z = 3 \\ ax + 2y + z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \end{cases}$.

4. Lös följande ekvationssystem simultant:

a. $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 4x + 2y + z = 9 \end{cases}$ och $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 3x + y + 2z = 11 \\ 4x + 2y + z = 12 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ 4x + 3y + z = 1 \end{cases}$ och $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2 \end{cases}$.

5. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = a \\ x - 5y + 8z = 1 \end{cases}$

skall ha någon lösning?

6. Bestäm matrisen $(3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ där $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Bestäm matrisen $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - 2\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$ där $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Lös matrisekvationen $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ där $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Visa att matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ är inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ledning. För att visa att $\boldsymbol{A}$ är inversen till $\boldsymbol{B}$ räcker det att visa att $\boldsymbol{AB} = \mathrm{I}$.

10. Bestäm inverser till följande matriser

a. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

b. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

11. För vilka värden på konstanter a och b är matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en invers till matrisen $\begin{pmatrix} b & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$?

12. Bestäm inversen till matrisen $\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - 3\boldsymbol{B})$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

13. Lös matrisekvationen $\boldsymbol{A}X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Ledning. Multiplicera ledvis, från vänster med $\boldsymbol{A}^{-1}$. I vänsterledet får man $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}X = X$. Lösningen fås ur $X = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot$ den givna matrisen.

14. För vilka reella a är matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ inverterbar?

15. Bestäm för varje a–värde antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2ax + 3y + az = 4a \\ x + (a-1)y = a \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

16. Bestäm $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tips: $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{BA})^{-1}$.

17. Beräkna $\det(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})$ och $\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$ då $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Svar:

1. a. $x = 3,\ y = 2,\ z = 1.$

   b. Ingen lösning.

   c. $x = 5 - t,\ y = t,\ z = -8.$

2. Precis en lösning $\Leftrightarrow a \neq 6.$

   Oändligt många lösningar $\Leftrightarrow a = 6$ och $b = 0.$
   Ingen lösning $\Leftrightarrow a = 6$ och $b \neq 0.$

3. $a = -1 \Rightarrow$ olösbart, $a \neq -1 \Rightarrow x = \dfrac{-20}{7(a+1)}\ ,\ y = \dfrac{11}{7}\ ,\ z = \dfrac{5a - 15}{7(a+1)}\ .$

4. a. $x = 1,\ y = 2,\ z = 1$ och $x = 2,\ y = 1,\ z = 2$

   b. $x = 1 - t,\ y = t - 1,\ z = t$ och ingen lösning.

   c. ingen lösning och $x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

   d. ingen lösning och $x = 2s - 3t,\ y = s,\ z = 4t - 4s,\ w = t.$

5. $a = 3.$

6. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$

10. a. $\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$ b. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

11. $a = 2$ och $b = 0.$

12. $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

13. $X = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \\ 11 & 13 & 17 \end{pmatrix}$

14. $a \neq 4$

15. $a \neq -1$ och $a \neq 3 \Rightarrow$ en lösning, $a = -1 \Rightarrow$ ingen lösning, $a = 3 \Rightarrow$ oändligt många lösningar.

16. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$

17. 0 resp 29.