Modul 1: Komplexa tal och Polynomekvationer

1. Skriv på formen $a + b$i, där a och b är reella,

   a. $(2 + i)(1 - 2i)^2$. b. $\dfrac{1 + 2i}{3 - 4i} + \dfrac{3i}{1 + 2i}$

2. Lös ekvationerna

   a. $(2 - i)z = 3 + i$. b. $(2 + i)\overline{z} = 1 + 3i$ c. $(2 + i)\overline{z} + iz = 2 - 2i$.

3. Skriv på polär form

   a. $\dfrac{(2 + 2i)(1 + i\sqrt{3})}{(\sqrt{12} - 2i)i}$ b. $\dfrac{(\sqrt{3} + 3i)^4}{(1 - i)^6}$

4. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} -iz + (1 + i)w = 2i \\ (1 + i)\overline{z} + (2 - i)\overline{w} = 3 - 2i \end{cases}.$$

5. Lös ekvationen

   a. $z^2 = 8 - 6i$. b. $z^4 + 4 = 0$. c. $(z - 1)^3 + 8i = 0$.

6. Bestäm en polynomekvation av lägsta möjliga grad, som

   a. har rötterna $1 - 2i$ och i.

   b. har rötterna $1 - 2i$ och i samt reella koefficienter.

7. Ange summan resp. produkten av rötterna till ekvationen

   a. $z^2 + (3 - 2i)z + 1 - 3i = 0$.

   b. $z^3 - (6 - 3i)z^2 + (8 - 12i)z + 10i = 0$.

8. Två av rötterna till ekvationen $z^3 - (2 + 3i)z^2 - (4 - 4i)z + 4 + 2i = 0$ har produkten $1 + 3i$. Lös ekvationen.

9. a. Lös ekvationen $z\overline{z} - z = 1 - i$. ($\overline{z}$ är konjugatet till w.)
   Tips: Sätt $z = a + bi$.

   b. Ekvationerna $z^3 - (1 - i)z^2 - 8iz + 8 + 8i = 0$ och $z\overline{z} - z = 1 - i$ har en rot gemensam. Lös den första ekvationen.

10. Lös ekvationen

    a. $z^2 - (4 - 4i)z - 10i = 0$.

    b. $z^4 - (6 - 6i)z^2 - 16 + 12i = 0$.

11. Man vet att $z = 1 + i$ är en rot till den nedanstående ekvationen. Bestäm de övriga rötterna.

    a. $z^3 + (-1 - i)z^2 + z - 1 - i = 0$

    b. $z^3 - 5z^2 + 8z - 6 = 0$.

12. Bestäm talet a så att ekvationen $z^3 - az^2 - 2iz + a + 5i = 0$ får roten $z = a$. Bestäm de övriga rötterna.

13. Visa att polynomet $(z-w)(z-\overline{w})$ har reella koefficienter. ($\overline{w}$ är konjugatet till w.)

14. Uppdela så långt som möjligt i reella faktorer
a. $z^4 - 6z^2 + 25$. b. $z^6 - 7z^3 - 8$.

.

<u>Svar:</u>

1. a. $-2 - 11i$. b. $1 + i$.
2. a. $1 + i$. b. $1 - i$. c. $1 + 2i$.
3. a. $\sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$. b. $18(\cos(-7\pi/6) + i\sin(-7\pi/6))$.
4. $z = 1 - i$, $w = 2 + i$.
5. a. $3 - i$, $-3 + i$. b. $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$, $-1 - i$.
   c. $1 + \sqrt{3} - i$, $1 - \sqrt{3} - i$, $1 + 2i$.
6. a. $z^2 - (1 - i)z + 2 + i$. b. $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5$.
7. a. summan = $-3 + 2i$, produkten = $1 - 3i$.
   b. summan = $6 - 3i$, produkten = $-10i$.
8. $1 + i$, $2 + i$ och $-1 + i$.
9. a. i, $1 - i$. b. $1 - i$, $2 + 2i$, $-2 - 2i$
10. a. $3 - i$, $1 - 3i$. b. $3 - i$, $-3 + i$, $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$.
11. a. $\pm i$ b. 3, $1 + i$.
12. $a = 2 - i$. De övriga rötterna är $1 + i$ och $-1 - i$.
14. a. $(z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z + 5)$. b. $(z - 2)(z + 1)(z^2 - z + 1)(z^2 + 2z + 4)$.