SF1672/SF1604, JAN 2017

(1) I vår vanliga 3-dimensionella rymd (ON-system):

(a) (1p) Bestäm längden av vektorn $\begin{bmatrix}7 & 3 & 4\end{bmatrix}^T$.

(b) (1p) Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}^T$.

(c) (1p) Bestäm $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$.

(d) (1p) Bestäm det plan π som förutom origo innehåller punkterna $(1, 2, 3)$ och $(2, 1, 0)$.

(e) (1p) Bestäm parameterformen för en linje genom punkten $(3, 2, 1)$ och som är parallell med planet π i föregående uppgift.

(a) $\sqrt{74}$

(b) Eftersom $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}^T = 0$ är vinkeln $\pi/2$.

(c) $\begin{bmatrix}-3 & 6 & -3\end{bmatrix}^T$.

(d) Normalvektorn till planet ges av $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-3 & 6 & -3\end{bmatrix}^T$. Ekvationen för planet kan skrivas som $x - 2y + z = 0$.

(e) Planet innehåller vektorn $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$. En linje med önskad egenskap är

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}^T + s \cdot \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T, \quad s \in \mathbb{R}$$

---

(2) (5p) Vilka av följande fem påståenden om matrisen

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

är **FALSKA**? (Du behöver inte motivera svaren.)

(a) A är inverterbar.

(b) Om $v \in \mathbb{R}^5$ och $Av = v$ så är $v = 0$.

(c) Den sista raden i A^2 är $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 25\end{bmatrix}$.

(d) A kan transformeras till identitetsmatrisen med hjälp av elementära radoperationer.

(e) $\det(A) = 120$.

Påstående (b) är falskt.

---

(3) (5p) Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den ortogonala projektionen på planet $x+y+z = 0$.

(a) (2p) Bestäm en ON-bas för nollrummet, $\ker(T)$.

(b) (3p) Bestäm en ON-bas för bildrummet, range(T).

(a) Vektorn $n = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ är normalvektor till planet. Då $\ker(T) = \mathrm{Span}(n)$, ges en ON-bas av $\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\}$.

(b) range(T) spänns upp av $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$. Gram-Schmidt ger att $\{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}^T\}$ är en ON-bas.

---

(4) (5p) Låt $V = \mathbb{P}_3 = \mathrm{Span}(1, t, t^2, t^3)$ med skalärprodukt

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt$$

och låt $W = \mathrm{Span}(1, t, t^2)$. Bestäm den vektor $w \in W$ som minimerar $\|w - t^3\|$. (Anmärkning: kom ihåg att $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.)

Med Gram-Schmidt får vi att $\{1, t, t^2 - 1/3\}$ är en ortogonal bas för W. Eftersom

$$w = P_W(t^3) = 0 \cdot 1 + \frac{\langle t, t^3\rangle}{\langle t, t\rangle} \cdot t + 0 \cdot t^2$$

och $\langle t, t^3\rangle = \int_{-1}^{1} t^4\,dt = 2/5$ samt $\langle t, t\rangle = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = 2/3$ ser vi att

$$w = \frac{3}{5}t.$$

---

(5) (5p) Givet den kvadratiska formen $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definierad av

$$q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2, \qquad x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

låt $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : q(x) = 1\}$. Finn de vektorer $x \in S$ så att $\|x\|$ är minimal.

Med

$$A = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

kan vi skriva $q(x) = x^t A x$.

Vi noterar först att $p_A(\lambda) = (2-\lambda)^3 - (2-\lambda)$ har rötterna $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Enligt principalsaxelsatsen finns ett variabelbyte $y = Px$, där $P = \begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}$ är ortogonal, så att

$$q(x) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i y_i^2$$

och

$$q(x) \leq \lambda_3 \|x\|^2$$

med likhet om och endast om $x = s \cdot v_3$ för $s \in \mathbb{R}$. Om $q(x) = 1$ får vi att $|x|^2 \geq 1/3$ med likhet om och endast om $x = s \cdot v_3$; eftersom $|v_3| = 1$ får vi även $s^2 = 1/3$ om likhet gäller.

För att hitta v_3 löser vi $(A - 3I)y = 0$ och får då $v_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$. De sökta vektorerna är alltså $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$.

---

(6) (5p) Låt A vara en 5×5 matris. Givet en startvektor $v_0 \in \mathbb{R}^5$ definerar vi $v_1 = Av_0$, och mer generellt $v_{n+1} = Av_n$ för alla heltal $n \geq 1$. Vi säger att stabilitet råder om sekvensen $\{|v_n|\}_{n\geq 0}$ är begränsad oavsett vilken startvektor v_0 vi väljer. Kan stabilitet råda om trace$(A) = 6$ och det karakterista polynomet $p_A(\lambda)$ har fem distinkta rötter?

Nej. Låt $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ vara rötterna till $p_A(\lambda)$. Eftersom trace$(A) = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i = 6$ måste $|\lambda_j| > 1$ för något j. Om vi låter w_j vara motsvarande egenvektor och $v_0 = w_j$ ser vi att $v_n = A^n v_0 = \lambda_j^n v_0$, och således att $|v_n| = |\lambda_j|^n |v_0| \to \infty$.

DEL II

OBS: Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

(7) Låt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vara distinkta reella tal. Visa att matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \end{bmatrix}$$

är inverterbar.

Det räcker att visa att A^T är inverterbar. Antag att $A^T x = 0$ där $x = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^T$. Om vi låter $p(t) = \sum_{i=0}^{3} c_i t^i$ ser vi att

$$p(\alpha) = p(\beta) = p(\gamma) = p(\delta) = 0$$

dvs att polynomet $p(t)$ har fyra distinkta rötter. Eftersom gradtalet av $p(t)$ är högst tre ser vi att $p(t)$ måste vara nollpolynomet. Således är $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Vi ser att $x \to A^T x$ är injektiv, och därför inverterbar.

---

(8) Låt P vara en $n \times n$ matris med egenskapen att $P^2 = P$. Visa att P är diagonaliserbar.

Låt $V = \mathbb{R}^n$, $V_1 = ker(P)$ och $V_2 = ker(I - P)$. Givet $v \in V$ kan vi skriva

$$v = Pv + (I - P)v = v_1 + v_2$$

dvs $v_1 = Pv$ och $v_2 = (I - P)v$. Vi ser då att $v_1 \in ker(I - P)$ och att $v_2 \in ker(P)$. Således kan godtycklig vektor $v \in V$ skrivas som

$$v = v_1 + v_2$$

med $v_i \in V_i$. Om vi låter $b_1, \ldots, b_k$ vara bas för V_1 och $c_1, \ldots, c_l$ vara bas för V_2 ser vi att $b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_l$ spänner upp V. Genom att slänga vektorer som finns i höljet av de föregående (om nödvändigt; "bas uppifrån") kan vi bilda en bas $d_1, \ldots, d_n$ för V med egenskapen att d_i tillhör antingen V_1 eller V_2. Således har vi hittat en bas av egenvektor till P och därför är P diagonaliserbar.