Matematiska Institutionen, KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1672/SF1604, för CTFYS och vissa CL, den 13 april 2017 kl 08.00-13.00.

Examinator: Pär Kurlberg

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.
För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser:

A:	80%
B:	70%
C:	60%
D:	50%
E:	45%
Fx:	42%

DEL I

1. (5p) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $(3, 5, 5)$ och $(4, 5, 7)$ och som är vinkelrätt mot planet med ekvation $x + y + z - 7 = 0$.

Låt $P_1 = (3,\,5,\,5)$ och $P_2 = (4,\,5,\,7)$, och låt $n_1 = (1,\,1,\,1)$ vara normalvektor till det givna planet. Normalvektorn n_2 till det sökta planet är vinkelrät dels mot $v = P_2 - P_1 = (1,\,0,\,2)$, samt mot $n_1 = (1,\,1,\,1)$, vi kan ta

$$n_2 = n_1 \times v = (2,\,-1,\,-1)\,.$$

Insättning av P_1 i planets ekvation $2x-y-z+D = 0$ ger att $D = 4$. Planet ekvation är alltså

$$2x - y - z + 4 = 0.$$

---

2. (5p) Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

och beräkna sedan A^{2017}.

Vi ser att $p_A(x) = x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)$ och egenvärden till A ges då av $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, med motsvarande egenvektorer $v_1, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Med $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ och $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$ ser vi att $A = P^{-1}DP$.

Eftersom $D^2 = 1$ är $D^{2017} = D$ och således är $A^{2017} = P^{-1}D^{2017}P = P^{-1}DP = A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

---

3. (5p) Låt A vara en $n \times n$ matris. Betrakta de fem följande påståendena och markera, genom att rita en cirkel runt "sant" eller "falskt", om de är sanna eller falska. Du behöver inte motivera svaren. OBS: fel svar ger -1p, inget svar 0p, rätt svar: 1p.

(a) **(Sant | Falskt)** Om A innehåller en rad eller kolonn med bara nollor, så är 0 ett egenvärde till A.

(b) **(Sant | Falskt)** Två egenvektorer till A som tillhör samma egenvärde är alltid linjärt beroende.

(c) **(Sant | Falskt)** En nollskild vektor kan inte svara mot två olika egenvärden.

(d) **(Sant | Falskt)** Godtycklig nollskild linjärkombination av egenvektorer till A är en egenvektor till A.

(e) **(Sant | Falskt)** En ortogonal matris är inverterbar.

Följande är sanna: a, c, e.

---

4. (5p) Anpassa kurvan $y = ax^2 + bx + c$ med minsta kvadratmetoden till följande tabell av mätdata

x	-1	0	1	2
y	2	0	2	4

Med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

söker vi minsta kvadratlösningen till $Ax = y$, dvs vi vill finna x så att $A^T Ax = A^T y$ dvs lösningen till systemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 8 & 6 & 20 \\ 8 & 6 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \end{array} \right).$$

Radelimination ger att $x = \left(1, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)^T$.

---

5. (5p) Låt $M_{2\times 2}$ beteckna rummet av reella 2×2 matriser och introducera den inre produkten

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \right\rangle = ax + by + cz + dw.$$

Definiera $S : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ genom $S(A) = A + A^T$. Bestäm ON-baser, med avseende på ovanstående inre produkt, för range(S) och ker(S).

Eftersom $S(A)^T = S(A)$ är range(S) ett delrum till mängden symmetriska matriser. Givet en symmetrisk matris B, ser vi att $S(B/2) = (B^T + B)/2 = 2B/2 = B$, således är range$(S)$ exakt mängden av symmetriska matriser, och en bas för denna mängd ges av

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vidare är

$$S\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$$

och således spänns $\ker(S)$ upp av $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

En ON-bas till $\ker(S)$ ges således av $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ och en ON-bas till range(S) ges av

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

---

6. (5p) Låt A vara en reell $n \times n$ matris och bilda $B = A^T A$. Visa att det finns minst en reell $n \times n$ matris C så att $C^2 = B$.

Vi ser att $B^T = (A^T A)^T = A^T A = B$, dvs B är symmetrisk och kan således diagonaliseras, dvs $B = PDP^{-1}$ där D är en diagonal matris med diagonalelement $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Om v_i är en motsvarande egenvektor ser vi att

$$d_i |v_i|^2 = v_i^T B v_i = v_i^T A^T A v_i = |Av_i|^2 \geq 0$$

och således är $d_i \geq 0$ för alla i. Om vi låter M vara den diagonala matrisen med $\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n}$ på diagonalen, och låter $C = PMP^{-1}$ ser vi att

$$C^2 = PMP^{-1}PMP^{-1} = PM^2P^{-1} = PDP^{-1} = B$$

(M är uppenbart reell, och således är även C reell.)

DEL II

OBS: Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

7. (5p) Låt $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Låt A vara en $n \times n$ matris med egenskapen att $p(A) = 0$ (nollmatrisen). Visa att A är diagonaliserbar. (Förtydligande exempel: om $f(x) = x^2 + 2x + 1$ så är $f(A) = A^2 + 2 \cdot A + 1 \cdot I$, där I är identitetsmatrisen av storlek $n \times n$.)

Rotgissning ger snabbt att

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Vi betraktar avbildningen $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2(x)$ som ges av

$$(a,b,c)^T \to a(x-1)(x-2) + b(x-1)(x-3) + c(x-2)(x-3)$$

och ser att $\ker(S) = \{0\}$ genom att evaluera bilden av S i punkterna $1, 2, 3$. Således är S surjektiv och vi kan hitta $a, b, c \in \mathbb{R}$ så att

$$a(x-1)(x-2) + b(x-1)(x-3) + c(x-2)(x-3) = 1.$$

Givet $v \in \mathbb{R}^3$ kan vi skriva

$$v = 1 \cdot v = Iv = a(A-I)(A-2I)v + b(A-I)(A-3I)v + c(A-2I)(A-3I)v = v_1 + v_2 + v_3$$

Eftersom $p(A) = 0$ ser vi att $(A-3I)v_1 = (A-2I)v_2 = (A-I)v_3 = 0$, dvs v_1, v_2, v_3 är egenvektorer till A med egenvärdena $1, 2, 3$. Alltså spänns $\mathbb{R}^n$ upp av egenvektorer till A. Genom att "kasta" eventuellt beroende vektorer ("bas uppifrån") har vi hittat en bas av egenvektorer till A, dvs A är diagenaliserbar.

---

8. (5p) Låt $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \subset \mathbb{R}^3$ vara tre plan som alla innehåller nollvektorn. Låt n_1, n_2, n_3 vara normalvektorer till planen π_1, π_2, π_3, och anta att n_1, n_2, n_3 är oberoende. För $i = 1, 2, 3$ låt P_i beteckna den ortogonala projektionen på π_i, och bilda matrisen $A = P_1 P_2 P_3$. Givet att $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, visa att

$$A^k x \to 0$$

då $k \to \infty$.

Vi börjar med följande observation: om P är en ortogonal projektion så är $|Pv| \leq |v|$ med likhet om och endast om $Pv = v$. Vi ser nu att $|Av| \leq |v|$, med likhet om och endast om $P_i v = v$ för $i = 1, 2, 3$. Eftersom $P_i v = v$ om och endast om $v \perp n_i$ ser vi att enda möjligheten till att $|Av| = |v|$ är att $v \perp n_i$ för $i = 1, 2, 3$; eftersom n_1, n_2, n_3 är oberoende måste då $v = 0$. Således är $|Av| < |v|$ om $v \neq 0$.

Om vi definerar en kvadratisk form $q(v) = |Av|^2$ vet vi att $\lambda_1 |v|^2 \leq q(v) \leq \lambda_3 |v|^2$ om vi ordnar egenvärdena (till den symmetriska matrisen B som svarar mot q) så att $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$, samt att likhet gäller om v väljs som motsvarande egenvektor till B. Således måste $|\lambda_i| < 1$ för $i = 1, 2, 3$, och det finns en konstant $c \in [0, 1)$ så att $|Av| \leq c|v|$ för alla $v \in \mathbb{R}^3$.

Således gäller $|A^n v| \leq c^n |v|$; eftersom $c^n \to 0$ ser vi att $A^k x \to 0$.
