"Geometri"

① Vinklar har vi talat om: $\vec{u}$, $\vec{v}$ icke-noll vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$:
vi definierar vinkeln θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ genom

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|},$$

(I $\mathbb{R}^n$, $n>3$, kan man definiera "vinkeln" på detta sätt.)

② Skalärprodukten förekommer i formeln; vi har definierat skalärprodukten för $\mathbb{R}^n$ och har sett dess generalisering, en inre produkt ($\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$), för allmänna vektorrum.

③ I $\mathbb{R}^3$ (och bara i $\mathbb{R}^3$) finns det även den så kallade kryssprodukten. Den associerar till två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^3$ en vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ i $\mathbb{R}^3$.
En minnesregel för att beräkna $\vec{u} \times \vec{v}$ är:
låt $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ vara standardbasen för $\mathbb{R}^3$, och skriv $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3$, $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$.
Då kan man beräkna $\vec{u} \times \vec{v}$ med "determinanten"

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \text{ dvs.:}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e}_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_3.$$

Viktiga egenskaper av vektorn $\vec{u} \times \vec{v}$ är:

ⓐ $\vec{u} \times \vec{v}$ är ortogonal mot både $\vec{u}$ och $\vec{v}$

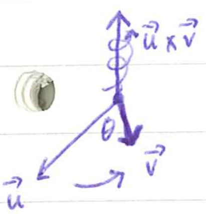
ⓑ $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \sin\theta$ (där θ är vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$)
(om $\vec{u} = \vec{0}$ eller $\vec{v} = \vec{0}$ är vinkeln inte definierad, men då är $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$).
Det följer(!) att $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2$.

ⓒ Från minnesregeln ser man att $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.
Om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är linjärt oberoende, ser vi att $\vec{u} \times \vec{v}$ är nästan bestämd; vi vet att vektorn ligger

på den unika linjen genom origo som är ortogonal mot planet som spänns av $\vec{u}$ och $\vec{v}$, och vi vet dess längd. Men vi vet ännu inte vilken vektor är $\vec{u} \times \vec{v}$ och vilken är $\vec{v} \times \vec{u}$.

<u>Svar:</u> Antag att $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ är högerorienterad:

: en vanlig skruv placerad i $\vec{e}_3$-riktningen rör sig uppåt då den vrids över $90°$-vinkeln mellan $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$.



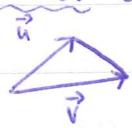
Då är även $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ högerorienterad: en vanlig skruv placerad i $\vec{u} \times \vec{v}$-riktningen rör sig uppåt då den vrids över vinkeln θ $(0° < \theta < 180°)$ mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

Därmed inser man att definitionen av $\vec{u} \times \vec{v}$ faktiskt är koordinatfri (det var inte alls klart från början).

(4) Kryssprodukten är <u>inte</u> associativ. Om $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ är 3 vektorer i $\mathbb{R}^3$, är både $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ och $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ definierade (vektorer i $\mathbb{R}^3$), men de är i allmänhet <u>olika</u> vektorer. Att tala om "$\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w}$" blir då meningslöst.

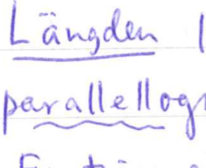
(5) <u>Längden</u> $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ av $\vec{u} \times \vec{v}$ är lika med <u>arean</u> av <u>parallellogrammet</u> som spänns av $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

En triangel



har därför area $\frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

(6) Tre linj. ober. vektorer i $\mathbb{R}^3$, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (med koordinater (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3)) spänner ett så kallat <u>parallellepipedum</u>.



Dess <u>volym</u> är absolut beloppet av determinanten $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ $\left(= \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\right)$.

(7) Två l.o. vektorer i $\mathbb{R}^2$, $\vec{u}, \vec{v}$ (med koordinater $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$) spänner ett parallellogram. Dess <u>area</u> är absolutbeloppet av determinanten $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$.

Linjer och plan i $\mathbb{R}^3$.

(1) Ett <u>plan i $\mathbb{R}^3$</u> ges av en ekvation på formen

$ax+by+cz=f$. Här (x,y,z) är koordinater i $\mathbb{R}^3$ och a, b, och c är inte alla lika med noll. Om (x_0,y_0,z_0) är en punkt i planet, kan vi skriva ekvationen som

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

Det finns ett unikt plan genom origo som är parallellt med det här planet. Detta plan har ekvation $ax+by+cz=0$. Denna ekvation kan även skrivas som $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0$ och det följer att (a,b,c) är en så kallad <u>normalvektor</u> för planet $ax+by+cz=0$: den är ortogonal mot alla vektorer i planet. På samma sätt, om $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ är en punkt i planet $ax+by+cz=f$, då är (a,b,c) ortogonal mot alla vektorer $\overrightarrow{P_0P}$, där P är en godtycklig punkt i planet. Så vi kallar (a,b,c) fortfarande för en normalvektor: den är ortogonal mot alla vektorer $\overrightarrow{PQ}$, där P och Q är godtyckliga punkter i planet.

(2) Om P, Q, R är 3 olika punkter som inte ligger på en och samma linje, finns det ett unikt plan genom dem. En normalvektor för planet är då t.ex. $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ och det blir enkelt att bestämma en ekvation för planet.

<u>Ex.</u> $P=(1,2,-1)$, $Q=(2,3,1)$, $R=(3,-1,2)$.

$\overrightarrow{PQ}=(1,1,2)$, $\overrightarrow{PR}=(2,-3,3)$; $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ fås genom

$\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\1 & 1 & 2\\2 & -3 & 3\end{vmatrix}=9e_1+e_2-5e_3=(9,1,-5)$; en ekvation

blir då t.ex. $9(x-1)+(y-2)-5(z+1)=0$, eller

$9x+y-5z=9+2+5=16$.

Obs. att metoden är 'fail-safe': om P, Q, R ligger på en linje, är $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$ linjärt beroende, och $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \vec{0}$! (Det finns nu oändligt många plan genom P, Q, och R, och vi hittar ingen unik normalvektor.)

(3) Om P och Q är 2 olika punkter, finns det exakt en linje genom dem. Om $P = (x_0, y_0, z_0)$ och $\overrightarrow{PQ} = (a, b, c)$ kan vi skriva linjen med hjälp av ekvationerna

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc, \qquad (*)$$

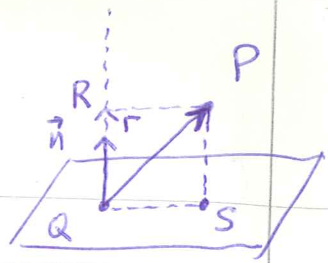
där t är ett godtyckligt reellt tal. Talet t kallas en parameter, och $(*)$ är ekvationer på parameterform för en linje i $\mathbb{R}^3$. (Man kan göra ~~likadant~~ ngt. liknande i $\mathbb{R}^n$ om man vill.)

(4) Vanligtvis skär en linje och ett plan varandra i exakt en punkt; men linjen kan även ligga i planet, eller vara parallell med planet (dvs. att de inte skär varandra). Om man har en ekvation för planet som ovan, och ekvationer på parameterform för linjen, är det bara att sätta $(*)$ in i planets ekvation och att lösa för t. Vanligtvis finns det exakt 1 lösning, som ger skärningspunkten; men det kan även finnas ∞ många lösningar, eller inga alls.

(5) Vanligtvis skär 2 plan varandra i en linje; men de kan även sammanfalla eller vara parallella.

Har man ekvationer för båda planen som ovan, är det bara att lösa systemet som består av de 2 ekvationerna för att se vad som inträffar. Vanligtvis får man direkt ekvationerna för skärningslinjen på parameterform. (Om man får 2 fria variabler, sammanfaller planen; finns det inga lösningar, då är planen parallella.)

⑥ Avståndet mellan en punkt P och ett plan $ax+by+cz=f$:



ta en godtycklig punkt Q i planet och projicera $\overrightarrow{QP}$ på normalvektorn $\vec{n}=(a,b,c)$; längden av projektionen är avståndet! I bilden:

$\overrightarrow{QR} = \text{proj}_{\vec n}\overrightarrow{QP}$; $\|\overrightarrow{QR}\| = \|\overrightarrow{SP}\|$ = avståndet från P till planet.

Ex. $P=(1,-4,-3)$; planet $2x-3y+6z=-1$.

Vi kan ta t.ex. $Q=(1,1,0)$ som punkt i planet.

$\overrightarrow{QP}=(0,-5,-3)$; $\vec n=(2,-3,6)$.

$$\overrightarrow{QR} = \text{proj}_{\vec n}\overrightarrow{QP} = \frac{\overrightarrow{QP}\cdot\vec n}{\vec n\cdot\vec n}\vec n = \frac{-3}{49}\vec n .$$

Avståndet är $\|\overrightarrow{QR}\| = \frac{3}{49}\|\vec n\| = \frac{3}{49}\sqrt{49} = \frac{3}{7}$.

Man kan naturligtvis även beräkna punkten S:

$$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{QR} = \frac{-3}{49}(2,-3,6) = \left(\frac{-6}{49}, \frac{9}{49}, \frac{-18}{49}\right)$$

så $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{SP} = (1,-4,-3) - \left(\frac{-6}{49}, \frac{9}{49}, \frac{-18}{49}\right)$

$= \left(\frac{55}{49}, \frac{-205}{49}, -\frac{129}{49}\right)$, så detta är S-koordinaterna.

Det blir inte snyggt, men det stämmer:

$2\cdot 55 + 3\cdot 205 - 6\cdot 129 = -49$, dvs., S ligger i planet!

⑦ Avståndet mellan 2 parallella plan, eller mellan en linje och ett plan som inte skär varandra: ta en punkt på ett av planen, eller på linjen, och fortsätt som ovan!