Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till tentamensskrivning i Diskret Matematik för CINTE och CMETE, SF1610 och 5B1118, tisdagen den 7 januari 2014, kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (**OBS:** Totalsumma poäng vid denna tentamensskrivning är 37p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Observera: Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

Var och en av nedanstående uppgifter svarar mot en kontrollskrivning. Godkänt resultat på en kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på motsvarande uppgift. Att lösa en uppgift som man på detta sätt redan har till godo ger inga extra poäng.

1. (a) (1p) Lös ekvationen $3x + 5 = 7$ i ringen Z_8.

   Lösning. Vi multiplicerar vänstra och högra ledet med 3 och får då den ekvivalenta ekvationen

   $$x - 1 = 5,$$

   eftersom $-1 = 7$.
   SVAR: 6.

   (b) (2p) Bestäm $17^{84} (\text{mod } 43)$.

   Lösning. I räkningarna nedan använder vi Fermats lilla sats: Om p primtal och p inte delar talet a så gäller att $a^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p)$.

   $$17^{84} \equiv_{43} (17^{42})^2 \equiv_{43} 1^2$$

   SVAR: 1.

2. (3p) Bestäm antalet ord av längd 10 som man kan bilda med hjälp av de 10 bokstäverna a, a, a, a, b, b, b, c, c, c.
   OBS. Lösningen skall förutom motiveringar innehålla ett svar som ges som ett naturligt tal, dvs ett av talen 1, 2, 3, ...

   Lösning. Ur de tio positionerna skall tre delmängder väljas, de fyra postionerna åt a:na, de tre positionerna åt b:na och de tre positionerna åt c:na. Dessa mängder är etiketterade och svaret ges då av multinomialkoefficienten

   SVAR:
   $$\binom{10}{4,3,3} = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 4200.$$

3. (3p) Gruppen $G = (Z_{187}, +)$ har precis fyra olika delgrupper. Bestäm dessa.

Lösning. Vi finner att $187 = 11 \cdot 17$, och finner fyra olika delgrupper

$$\begin{array}{rcl} \langle 1 \rangle &=& \{1, 2, 3, \ldots, 187 = 0\}, \\ \langle 11 \rangle &=& \{11, 22, 33, \ldots, 187 = 0\}, \\ \langle 17 \rangle &=& \{17, 34, 51, \ldots, 187 = 0\}, \\ \langle 0 \rangle &=& \{0\}. \end{array}$$

4. (a) (2p) Fyll i de element som fattas i matrisen **H** nedan, och som gör matrisen till en kontrollmatris (parity-checkmatris) till en 1-felsrättande kod C.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} & & 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & 0 & \end{pmatrix}$$

Lösning. Kolonnerna skall vara olika och skilda från nollkolonnen. Trial and error ger då
SVAR:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) (1p) Bestäm ett binärt ord av längd 7 som inte ligger i C men som kan rättas till ett ord i C.

Lösning. 100000

5. (a) (1p) Förklara varför en bipartit graf med ett udda antal kanter aldrig kan ha en Eulerkrets, dvs en sluten Eulerväg.

Lösning. Om en graf har en Eulerkrets så har alla noder jämn valens. Låt X och Y beteckna de bägge nodmängderna i den bipartita grafen, dvs varje kant har sin ena ändpunkt i X och den andra i Y. Antalet kanter i grafen är då lika med antalet kanter ut från X-noder, dvs en summa av ett jämnt antal kanter.

(b) (1p) För vilka naturliga tal n existerar en graf, utan loopar och multipla kanter, med valenssekvensen 1, 2, 3, ..., n.

Lösning. För inget tal n, eftersom en nod i en graf med n stycken noder kan ha högst $n - 1$ grannar.

(c) (1p) Varje skog har fler noder än kanter. Gäller omvändningen, dvs är varje graf med fler noder än kanter en skog?

Lösning. Nej, tag t ex en graf bestående av den kompletta grafen K_3 på tre noder som en komponent samt en isolerad nod som den andra komponenten. Denna graf har fyra noder och tre kanter, men är inte en skog.

VGV

DEL II

6. (4p) Visa att $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ är delbart med 12.

   Lösning Visar först att uttrycket är delbart med 3. Detta är trivialt om 3 delar n. Vi betraktar nu fallet $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$ vi får då om vi räknar modulo 3 att

   $$n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n \equiv_3 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 1^2 - 2 \cdot 1 \equiv_3 1 + 2 - 1 - 2 \equiv_3 0.$$

   Vi betraktar sen fallet $n \equiv 2 (\text{mod } 3)$, dvs $n \equiv (-1) (\text{mod } 3)$ och får då om vi räknar modulo 3 att

   $$n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n \equiv_3 (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 2 \cdot (-1)1 \equiv_3 1 - 2 - 1 + 2 \equiv_3 0.$$

   Sen visar vi att uttrycket är delbart med 4. Detta är trivialt om 4 delar n. Vi betraktar nu fallet $n \equiv 1 (\text{mod } 4)$ vi får då om vi räknar modulo 4 att

   $$n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n \equiv_4 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 1^2 - 2 \cdot 1 \equiv_4 1 + 2 - 1 - 2 \equiv_4 0.$$

   Vi betraktar sen fallet $n \equiv 3 (\text{mod } 4)$, dvs $n \equiv (-1) (\text{mod } 4)$ och får då om vi räknar modulo 4 att

   $$n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n \equiv_4 (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 2 \cdot (-1)1 \equiv_4 1 - 2 - 1 + 2 \equiv_4 0.$$

   När $n \equiv 2 (\text{mod } 4)$ får vi

   $$n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n \equiv_4 2^4 + 2 \cdot 2^3 - 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \equiv_4 0 + 0 - 0 - 0 \equiv_4 0.$$

   Då uttrycket är delbart med de relativt prima talen 3 och 4 så är uttrycket också delbart med produkten av dessa tal.

   Alternativ lösning. Faktorisering av polynomet get

   $$n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n = n(n(n^2 - 1) + 2(n^2 - 1)) = n(n-1)(n+1)(n+2),$$

   vilket är en produkt av fyra konsekutiva tal. Vart fjärde tal är delbart med fyra och vart tredje tal är delbart med tre. Således är minst ett av de fyra talen delbart med tre och precis ett delbart med fyra. Produkten är då delbar med $3 \cdot 4$.

   Anm. Ett induktionsbevis hade också fungerat.

7. En skolklass med 14 barn, och som har lika många pojkar som flickor, skall delas in i två grupper med minst en pojke i varje grupp, och minst två flickor i varje grupp.

   (a) (2p) På hur många olika sätt kan denna gruppindelning ske om grupperna är lika stora?

   Lösning. Antal pojkar i grupperna är då antingen 2+5 eller 3+4, varvid antalet flickor blir 5+2 respektive 4+3. Så två fall att beakta.
   Fall 1: 2P5F+5P2F Väljer två pojkar ach fem flickor till gruppen 2P5F. Resterande går till andra gruppen. Antalet möjligheter är då:

   $$\binom{7}{2}\binom{7}{5} = \binom{7}{2}^2 = \left(\frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}\right)^2 = 21^2 = 441.$$

   Fall 2: 3P4F+4P3F Väljer tre pojkar ach fyra flickor till gruppen 3P4F. Resterande går till andra gruppen. Antalet möjligheter är då:

   $$\binom{7}{3}\binom{7}{4} = \binom{7}{3}^2 = \left(\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right)^2 = 35^2 = 1225.$$

   SVAR: 1664.

(b) (2p) På hur många olika sätt kan denna gruppindelningen ske om storleken på grupperna inte är specificerad.

Lösning. Vi delar in i två pojkgrupper med minst en pojke i varje grupp, och två flickgrupper med minst tvaa flickor i varje grupp. Sen kombinerar vi ihop dessa grupper. Antalet sätt att delain pojarna är Stirlingtalet $\mathrm{S}(7,2)$, som vi beräknar nedan

$$\mathrm{S}(7,2) = \mathrm{S}(6,1) + 2\mathrm{S}(6,2) = 1 + 2(\mathrm{S}(5,1) + 2\mathrm{S}(5,2)) =$$

$$= 1 + 2 + 4(\mathrm{S}(4,1) + 2\mathrm{S}(4,2)) = 1 + 2 + 4 + 8(\mathrm{S}(3,1) + 2\mathrm{S}(3,2)) =$$

$$= 1 + 2 + 4 + 8 + 16(\mathrm{S}(2,1) + 2\mathrm{S}(2,2)) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \cdot 3 = 63.$$

Nu till flickgruppindelningen som kan vara av typerna $2+5$, eller $3+4$. Totala antalet möjligheter är då

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = 21 + 35 = 56.$$

För varje give uppsättning av två flickgrupper och två pojkgrupper finns två möjliga kombinationer. Alltså

SVAR: $2 \cdot 56 \cdot 63 = 7056$.

OBS. Svaret skall ges i formen av ett naturligt tal, dvs som ett av talen 1,2,3, ...

8. (4p) Låt φ beteckna permutationen

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, 7\}$. Undersök om det finns någon permutation ψ sådan att $\psi\varphi\psi = \varphi^2$.

Lösning. Vi finner att

$$\varphi = (1\ 2\ 5\ 7)(3\ 6\ 4) = (1\ 7)(1\ 5)(1\ 2)(3\ 4)(3\ 6)$$

dvs φ är en udda permutation. Oavsett om ψ är en udda eller en jämn permutation så är $\psi\varphi\psi$ alltid en udda permutation. Emellertid är φ^2 en jämn permutation. Eftersom en jämn permutation andrig kan vara lika med en udda permutation går den givna ekvationen aldrig att uppfylla.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. Låt $\mathcal{S}_n$ beteckna gruppen som består av alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) (1p) Bestäm en cyklisk delgrupp med 6 element till $\mathcal{S}_{10}$.

Lösning. Låt $psi = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)$. Permutationen φ har ordning sex och genererar då en cyklisk delgrupp med 6 element:

$$\langle\varphi\rangle = \{\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6 = \mathrm{Id}\}.$$

(b) (1p) Visa att det finns en cyklisk delgupp med 21 element till $\mathcal{S}_{10}$.

Lösning. Låt $\psi = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7)(8\ \ 9\ \ 10)$. Ordningen av ψ är den minsta gemenssamma multipeln av 7 och 3, dvs 21. Permutationen ψ genererar då en cyklisk delgrupp med 21 element.

(c) (3p) *Uppgiften utgick pga konstig formulering.*

10. (5p) En ST-relation $\mathcal{R}$ på en mängd M är en relation som är symmetrisk och transitiv. Varje ekvivalensrelation på en mängd M är alltså en ST-relation, men varje ST-relation är inte en ekvivalensrelation. Diskutera likheter och skillnader mellan ekvivalensrelationer och ST-relationer. Bestäm också antalet ST-relationer på mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ och undersök om det finns någon ST-relation $\mathcal{R}$ på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sådan att $|\mathcal{R}| = 15$.

Lösning. Antag att $\mathcal{R}$ är en ST-relation på mängden M. Om för de två elementen a och b i mängden M gäller att $a\mathcal{R}b$ så gäller pga symmetrin att $b\mathcal{R}a$ och då pga transitiviteten att $a\mathcal{R}a$.

Låt, för $a \in M$, S_a beteckna mängden

$$S_a = \{x \in M \mid x\mathcal{R}a\}.$$

Vi visar nu att

$$S_a \cap S_b \neq \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad S_a = S_b.$$

Antag att $x \in S_a \cap S_b$, dvs $x\mathcal{R}a$ och $x\mathcal{R}b$. Då gäller enligt symmetrin att $a\mathcal{R}x$ och på grund av transitiviteten, att $a\mathcal{R}b$. Så om $x\mathcal{R}a$ gäller enligt transitiviteten att $x\mathcal{R}b$. Med andra ord

$$S_a \subseteq S_b.$$

På samma sätt visas att $S_b \subseteq S_a$, således

$$S_a \subseteq S_b \subseteq S_a,$$

varav följer att $S_a = S_b$.

Varje ST-relation på en mängd M inducerar alltså en partition av M

$$M = S_{a_1} \cup \cdots \cup S_{a_t}, \qquad \text{where} \qquad S_{a_i} \cap S_{a_j} = \emptyset \quad \text{for} \quad i \neq j.$$

Av det vi visade först gäller att om $|S_a| > 1$ så

$$b \in S_a \qquad \Longrightarrow \qquad b\mathcal{R}b.$$

Vi räknar nu upp antalet partitioner av $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

Typ I Vi får fyra uppdelningar av typen $M = \{i\} \cup (M \setminus \{i\})$. För motsvarande ST-relation gäller att $i\mathcal{R}i$ eller att $i \not\mathcal{R} i$, men för $j, k \in M \setminus \{i\}$ gäller $j\mathcal{R}k$. Varje partition av denna typ ger alltså upphov till två ST-partitioner.

Typ II Vi får tre uppdelningar av typen $M = \{i, j\} \cup (M \setminus \{i, j\})$, vilka var och en entydigt definierar motsvarande ST-relationen.

Typ III Vi får sex uppdelningar av typen $M = \{i\} \cup \{j\} \cup (M \setminus \{i, j\})$ där var och en ger upphov till fyra ST-relationer.

Typ IV Vi har en uppdelning av typen $M = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$, där t ex $i\mathcal{R}i$ eller $i \not\mathcal{R} i$, för $i = 1, 2, 3, 4$. Totalt 2^4 olika ST-partitioner som ger upphov till denna partition.

Antalet ST-partitioner på $\{1, 2, 3, 4\}$ är alltså

$$4 \cdot 2 + 3 + 6 \cdot 4 + 16 = 51.$$

Nu till den sista frågan. Betrakta en uppdelning av $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i delmängder av storlekarna n_1, n_2, ..., n_t. Antag $n_i > 1$ endast för $i = s, s+1, ..., t$. Om $\mathcal{R}$ skall bestå av 15 element får vi då systemet

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + \cdots + n_{s-1} \quad &+ n_s + \cdots + n_t &= \quad 6, \\ \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_{s-1} \quad &+ n_s^2 + \cdots + n_t^2 &= \quad 15. \end{aligned}$$

där $\delta_i \in \{0, 1\}$ för $i = 1, 2, \ldots, s-1$. Vi finner, efter lite trial and error, eller brute force av enklaste slag, att systemet ovan saknar lösning.