KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösning till kontrollskrivning 5B, 9 oktober 2012, 08.45–09.45, i SF1610 Diskret matematik för CINTE och CMETE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

	sant	**falskt**
a) Varje sammanhängade graf har minst ett spännande träd.	x	
b) Den kompletta bipartita grafen $K_{n,m}$ har alltid färre kanter än den kompletta grafen K_{n+m}.		x
c) Varje sammanhängande graf med precis en cykel är en planär graf.	x	
d) En graf kan ha ett udda antal noder med udda valens (grad).		x
e) I varje komplett graf $K_{n,m}$ finns en komplett matchning.		x
f) Den kompletta grafen K_n har en Eulerkrets om och endast om n är ett jämnt tal.		x

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) En graf G har valenssekvensen 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5. Bestäm antalet kanter i grafen G.

SVAR: 10

b) (1p) Vilka av följande tre grafer är planära: Den kompletta grafen K_6, de kompletta bipartita graferna $K_{4,3}$ respektive $K_{2,5}$.

SVAR: $K_{2,5}$

c) (1p) Berätta vad alternerande stigar, till matchningar i bipartita grafer, används till?

SVAR: Alternerande stigar används till att skapa större matchningar.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) En skog G har 15 träd med totalt 211 kanter. Hur många noder har skogen G?

Lösning: Varje träd innehåller en nod mer än antalet kanter i trädet. Så om skogen innehåller 15 träd har vi 15 fler noder än kanter.
Alltså

SVAR: 226 noder i skogen.

Namn	poäng uppg.4

4) a) (2p) Rita en graf med 13 noder och 18 kanter som saknar Hamiltoncykel men har en Eulerkrets.

b) (1p) Rita en graf med 13 noder och 18 kanter som har en Hamiltoncykel men saknar en Eulerkrets.

(Ge en kort motivering varför respektive graf uppfyller specifikationerna ovan.)

Lösning: a) Ritar först en cykelgraf med 13 noder och 13 kanter, noderna benämnes i den ordning de uppträder i cykeln för 1, 2, ..., 13. Vi ritar nu ytterligare 5 kanter, mellan noderna 1 och 3, 2 och 4, 5 och 7, 6 och 8 samt 9 och 11. Grafen har en Hamiltoncykel, t ex den först ritade cykeln, men ingen Eulerkrets, eftersom grafen har noder med udda valens.

b) Rita två cykler som bara har noden v_0 tillsammans, kalla de övriga noderna i resp cykel för a och b, resp 1, 2, 3, ..., 10. Ritar nu ytterligare fem kanter. Dessa går mellan noderna 1 och 3, 3 och 5, 5 och 2, 2 och 4, samt 4 och 1. Alla noder har då en jämn valens så grafen har en Eulerkrets. Men en cykel som passerar alla noder finns inte eftersom en sådan måste passera genom noden v_0 minst två gånger. Denna graf har alltså ingen Hamiltoncykel.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Visa att om det funnes en planär sammanhängade graf G sådan att minsta valensen (graden) hos grafens noder är lika med 6 så skulle antalet områden som uppstår vid en plan ritning av grafen G var mer än dubbelt så stort som antalet noder i grafen.

Lösning: Valenssumman är lika med två gånger antalet kanter e. Så med v stycken noder har vi att

$$2e = \sum_{\alpha \in V} \delta(\alpha) \geq \sum_{\alpha \in V} 6 = 6|V|,$$

där V betecknar mängden av noder i grafen.

Så om antalet kanter är v har vi att $2e \geq 6v$ och alltså att $e \geq 3v$. Eulers formel ger nu

$$r = e + 2 - v \geq 3v + 2 - v = 2(v + 1).$$

Beviset är klart.