KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	ååmmdd	kodnr

Lösning till kontrollskrivning 3B, den 28 april 2014, kl 13.00-14.00 i SF1610 Diskret matematik för CINTE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	Om gruppen $(G, \circ)$ har delgrupper med 8 resp 9 element så gäller att talet 72 delar antalet element i $(G, \circ)$.	x	
b)	För varje element g i en grupp $(G, \circ)$ med 36 element gäller att $g^{39} = g^3$.	x	
c)	I varje grupp $(G, \circ)$ gäller den kommutativa lagen, dvs $a \circ b = b \circ a$ för alla $a, b \in G$.		x
d)	Om ordingen av permutationen φ är primtalet $p > 2$ så är ordningen av permutationen φ^2 också lika med p.	x	
e)	Produkten av två udda permutationer är alltid en udda permutation.		x
f)	Varje grupp $(G, \circ)$ med 43 element har minst en icke-trivial delgrupp H.		x

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Låt φ och ψ vara nedanstående permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, 7\}$

$$\varphi = (1\ \ 2\ \ 3)(4\ \ 5)(6\ \ 7) \qquad \psi = (1\ \ 4\ \ 5)(3\ \ 2\ \ 6)(7).$$

Skriv $\varphi\psi$ som en produkt av disjunkta cykler.

SVAR: $(1\ \ 5\ \ 2\ \ 7\ \ 6)$.

b) (1p) Betrakta delgruppen $H = \{0, 3, 6, 9\}$ till gruppen $G = (Z_{12}, +)$. Bestäm samtliga sidoklasser till H i G.

SVAR:

$$H = \{0, 3, 6, 9\}, \qquad 1 + H = \{1, 4, 7, 10\}, \qquad 2 + H = \{2, 5, 8, 11\}.$$

c) (1p) Skriv upp multiplikationstabellen (alternativt additionstabellen) till en grupp med fem element.

SVAR: T ex

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Elementen $\{1, 3, 5, 9, 11, 13\}$ i ringen Z_{14} bildar under operationen multiplikation i Z_{14} en grupp G. (T ex så är $3 \cdot 5 = 1$.) Undersök om gruppen är en cyklisk grupp.
OBS. Lösningen skall motiveras.

Lösning. Antalet element i G är 6, så gruppen är cyklisk om och endast om den har ett element vars ordning är 6. Elements ordning delar antalet element i G, vilket vi nu utnyttjar när vi letar efter en generator:

$$3^2 = 9 \neq 1, \qquad 3^3 = 13 \neq 1.$$

Så ordningen av elementet 3 är varken 2 eller 3. Enda möjligheten är att ordningen av elementet 3 är 6.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Betrakta gruppen $G = (Z_{21}, +)$. Bestäm fyra olika delgrupper till G.
OBS. Lösningen skall motiveras.

SVAR: Vi har de två triviala delgrupperna $H_1 = \{0\}$ och $H_2 = G$. Varje element genererar en cyklisk delgrupp, men delgrupperna skall vara "olika", så, ett letande bland delarna till talet 21 ger delgrupperna

$$\begin{aligned} H_3 &= \langle 7 \rangle = \{7, 14, 0\} \\ H_4 &= \langle 3 \rangle = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 0\} \end{aligned}$$

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Låt φ beteckna permutationen

$$\varphi = (1\ \ 2\ \ 3)(4\ \ 5\ \ 6)(7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11)(12\ \ 13).$$

Ange de värden på det positiva heltalet k för vilka permutationen φ^k har ordning 3.

OBS. Lösningen skall motiveras.

Lösning. Ordningen av en permutation är minsta gemensamma multipeln av längden av de cyklerna man får om man skriver permutationen som en produkt av disjunkta cykler. Så den givna permutationen har ordning 30. Vi får nu

$$(\varphi^k)^3 = \text{id.} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3k = n30$$

för något heltal n. Ur detta finner vi

SVAR: $k = 10n$ för något positivt heltal n som inte delas av talet 3 eftersom ordningen av $\varphi^{10\cdot 3t} = \text{id.}$ för varje heltal t