Skrivningskod: Glöm den inte!		**Om du vill:** Lägg till tre bokstäver.	

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösning till kontrollskrivning 3B, 27 september 2011, 10.45–11.45, i SF1610 Diskret matematik för CINTE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	För varje positivt heltal n finns en grupp med n element.	x	
b)	I varje grupp gäller kommutativa lagen dvs att $a \circ b = b \circ a$ för alla element a och b i gruppen.		x
c)	Mängden av alla permutationer på en given mängd $\mathcal{M}$ bildar en grupp.	x	
d)	Det finns permutationer som varken är udda eller jämna.		x
e)	I varje grupp finns bara ett element vars ordning är 1.	x	
f)	I varje grupp G och för varje $a \in G$ gäller att a och a^{-1} har samma ordning.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Låt G vara gruppen $(Z_{17} \setminus \{0\}, \cdot)$. Ange ordningen av elementet 2 i G.

SVAR: 8.

b) (1p) Nedanstående tabell är en multiplikationstabell till en grupp med elementen $\{e, a, b, c, d, f\}$. Vilket av dessa element i G är lika med $b^{-1} \circ d \circ b$.

$\circ$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	f	d	c	b
b	b	d	e	f	a	c
c	c	f	d	e	b	a
d	d	b	c	a	f	e
f	f	c	a	b	e	d

SVAR: f.

c) (1p) Skriv permutationen (1 3)(1 2 4 5)(1 3) som en produkt av 2-cykler?

SVAR: (1 3)(1 5)(1 4)(1 2)(1 3)

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Låt G beteckna gruppen $(Z_{15}, +)$. Bestäm samtliga cykliska delgrupper till G.

Lösning: Då

$$
\begin{aligned}
<1> &= \{1, 1+1=2, 1+1+1=3, 4, 5, 6, \ldots, 0\} \\
<2> &= \{2, 2+2=4, 2+2+2=6, 8, 10, 12, 14, 1, 3, \ldots, 0\} =<1> \\
<3> &= \{3, 3+3=6, 3+3+3=9, 12, 0\} \\
<4> &= \{4, 4+4=8, 12, 1, 5, \ldots, 0\} =<1> \\
<5> &= \{5, 10, 0\} \\
<6> &= \{6, 12, 3, \ldots, 0\} =<3> \\
<7> &= <1> \\
<8> &= <1> \\
<9> &= <3> \\
<10> &= <5> \\
<11> &= <1> \\
<12> &= <3> \\
<13> &= <1> \\
<14> &= <1> \\
<0> &= \{0\}
\end{aligned}
$$

så

SVAR:$<1>= (Z_{12}, +)$, $<3>= \{3, 6, 9, 12, 0\}$, $<5>= \{5, 10, 0\}$, $<0>= \{0\}$.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Låt G beteckna gruppen $(Z_{12}, +)$. Bestäm två sidoklasser i G, till en delgrupp H till G, så att båda sidoklasserna innehåller 4 element vardera.

Lösning: Väljer först en delgrupp med 4 element. Vi tar

$$H =< 3 >= \{3, 6, 9, 0\} \ ,$$

och bildar sedan två sidoklasser t ex H självt och

$$H + 1 = \{3 + 1, 6 + 1, 9 + 1, 0 + 1\} = \{4, 7, 10, 1\} \ .$$

SVAR: Till exempel $\{3, 6, 9, 0\}$ och $\{4, 7, 10, 1\}$.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Mängden av alla permutationer på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ bildar en grupp som betecknas $\mathcal{S}_7$. Bestäm vilka storlekar de cykliska delgrupperna till $\mathcal{S}_7$ har.

Lösning: Storleken på en cyklisk grupp $< g >$ med generatorn g är lika med ordningen av elementet g, så vi söker de möjliga ordningarna som elementen i $\mathcal{S}_7$ kan ha.

Vet att en permutations ordning är lika med minsta gemensamma multipeln av cykellängderna vid en beskrivning av permutationen som en produkt av disjunkta cykler. Vi söker nu vilka möjligheter som finns till cykellängder vid en sådan beskrivning, varvid vi bortser från 1-cykler.

Om en permutation består av enbart en cykel kan vi ha cykellängderna 2, 3, 4, 5, 6, 7 och därmed finns cykliska delgrupper av dessa storlekar.

Om permutationen kan skrivas some en produkt av två cykler av längderna n och m gäller att $n + m \leq 7$ och permutationens ordning är $\mathrm{mgm}(n, m)$. Vi finner med hjälp av sådana permutationer ytterligare ordningar med hjälp av $n = 2$ och $m = 5$ vilket ger ordningen 10, $n = 3$ och $m = 4$ ger en permutation av ordningen 12. En systematisk genomgång av de möjliga ordningarna man får med hjälp av permutationer som är en produkt av två disjunkta cykler ger inga ytterligare ordningar.

En permutation som kan skrivas som en produkt av tre disjunkta cykler av längd minst två är antingen en produkt av tre 2-cykler, eller två 2-cykler och en 3-cykel. Sådana permutationer har ordningarna 2 resp 6.

Vi har nu tömt ut möjligheterna att hitta ordningar hos permutationerna, så

SVAR: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12.$