

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

**Kontrollskrivning 3A, den 2 oktber 2013, kl 11.00-12.00
i SF1610 Diskret matematik för CINTe och CMETE.**

Inga hjälpmedel tillåtna.

Minst 8 poäng ger godkänt.

Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \dots, 5$.

13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.

Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.

Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå!)

	sant	falskt
a) En grupp med 42 element kan ha en delgrupp med 8 element.		x
b) En icke-trivial delgrupp H till en grupp (G, \circ) kan själv ha en eller flera icke-triviala delgrupper.	x	
c) I varje grupp (G, \circ) gäller den kommutativa lagen, dvs $a \circ b = b \circ a$ för alla $a, b \in G$.		x
d) Alla permutationer av ordning $p > 2$, där p är ett primtal, är jämna permutationer.	x	
e) Mängden av alla permutationer av elementen i en mängd med minst 3 element bildar en grupp som är cyklisk.		x
f) Varje icke-cyklisk grupp (G, \circ) har minst en icke-trivial delgrupp H .	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Låt φ vara den permutation av elementen i mängden $\{1, 2, \dots, 9\}$ som skriven som en produkt av disjunkta cykler uttrycks

$$\varphi = (1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9).$$

Är φ en udda eller en jämn permutation.

(Svara bara.)

SVAR: Jämn.

b) (1p) Ange en sidoklass $a+H$ till en delgrupp H med fem element, ($|H| = 5$) till gruppen $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ sådan att sidoklassen $a + H$ innehåller elementet 5.

(Svara bara.)

SVAR: $\{5, 9, 13, 17, 1\}$.

c) (1p) Nedanstående tabell kan fyllas i så att det blir multiplikationstabellen till en grupp. Fyll i tabellen så den blir komplett.

SVAR:

\circ	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	f	d	c	b
b	b	d	e	f	a	c
c	c	f	d	e	b	a
d	d	b	c	a	f	e
f	f	c	a	b	e	d

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Låt φ , ψ och γ vara nedanstående permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, \dots, 5\}$, (φ , ψ och γ är skrivna som produkt av disjunkta cykler)

$$\varphi = (1\ 4\ 3\ 5), \quad \psi = (2\ 5\ 4)(1\ 3), \quad \gamma = (1\ 2)(3\ 5).$$

Bestäm ordningen av permutationen $\varphi \circ \psi \circ \gamma$.

OBS. Lösningen skall motiveras och kalkyler redovisas.

Lösning. Vi finner att t ex

$$\varphi \circ \psi \circ \gamma(1) = \varphi(\psi(\gamma(1))) = \varphi(\psi(2)) = \varphi(5) = 1.$$

Räkningar enligt ovan ger då

$$\varphi \circ \psi \circ \gamma = (1)(2\ 5\ 4)(3)$$

Eftersom ordningen är minsta gemensamma multipeln av cykellängderna, när permutationen är skriven som en produkt av disjunkta cykler, har vi

SVAR: $\text{mgm}(1, 3, 1) = 3$.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Elementen $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ i ringen \mathbb{Z}_{16} bildar under operationen multiplikation i \mathbb{Z}_{16} en grupp G . (T ex så är $5 \cdot 7 = 3$.) Bestäm två olika delgrupper H_1 och H_2 till G , som båda har fyra element, (dvs $H_1 \neq H_2$ och $|H_1| = |H_2| = 4$).

OBS. Lösningen skall motiveras.

Lösning. Vi söker delgrupper bland de cykliska delgrupperna, så ”trial and error” ger

$$H_1 = \langle 3 \rangle = \{3, 3^2, 3^3, 3^4 = 1\} = \{3, 9, 11, 1\},$$

och

$$H_2 = \langle 5 \rangle = \{5, 5^2, 5^3, 5^4 = 1\} = \{5, 9, 13, 1\},$$

vilket blir vårt svar.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Gruppen G är cyklisk och genereras av elementet a vars ordning är 96. Bestäm samtliga element g i G sådana att $g^6 = g^{11}$.

OBS. Lösningen skall motiveras.

Lösning. Vi multiplicerar med inversen till g sex gånger och får att

$$g^{-6}g^6 = g^{-6}g^{11}, \quad \text{dvs} \quad g^5 = e,$$

där e betecknar identitets-elementet i G . Eftersom G är cyklisk genererad av elementet a har vi att $g = a^k$ för något heltal $0 \leq k \leq 95$. Likheten för g , som vi fann ovan, kan då skrivas

$$(a^k)^5 = e.$$

Men om $a^s = e$ så måste s vara en multipel av 96. Vi kan alltså sluta att $5k = 96n$, för något heltal n . Talet 5 delar då n och det finns ett heltal t sådant att $n = 5t$, och därmed $k = 96t$. Tillbaka till g finner vi då

$$g = a^k = (a^{96})^t = e^t = e.$$

SVAR: g är identitets-elementet.