KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	kodnr

Lösning till kontrollskrivning 2B, den 23 april 2014, kl 13.00-14.00 i SF1610 Diskret matematik för CINTE och CMETE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	falskt
a)	Produkten $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 13 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 17$ delar produkten $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 30$.	x	
b)	$\binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \cdots + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 1024$		x
c)	$\binom{452}{211} + \binom{452}{212} = \binom{453}{213}$		x
d)	Det finns mer än tio miljoner sätt att placera 11 personer i en kö.	x	
e)	För Stirlingtalen $\mathrm{S}(n,k)$ och $\mathrm{S}(m,k)$ gäller att $\mathrm{S}(n,k) > \mathrm{S}(m,k)$ om och endast om $n > m$.	(x)	x
f)	För Stirlingtalen $\mathrm{S}(n,k)$, där $2 \leq k \leq n$ gäller rekursionen $\mathrm{S}(n,k) = \mathrm{S}(n-1,k-1) + k\mathrm{S}(n-1,k)$.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Ange Stirlingtalet $S(5,3)$.

SVAR: 25

b) (1p) För mängderna A, B och C gäller att

$|A \cup B \cup C| = 26, \quad |A| = |B| = |C| = 13, \quad |A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 5.$

Bestäm antalet element i $A \cap B \cap C$.

SVAR: 2

c) (1p) Ange det heltal x mellan 1 och 17 som är sådant att

$$\binom{18}{x} \geq \binom{18}{k}$$

för alla heltal k mellan 1 och 17.

SVAR: $x = 9$

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Fjorton olika böcker skall fördelas bland de tre barnen Kajsa, Emanuel och August så att Kajsa får tre böcker, Emanuel sex böcker och August fem böcker. Hur många olika sådana fördelningar av böcker finns det.
OBS. Lösningen skall motiveras, och svaret skall ges i formen av produkter, och/eller summor, av hela tal.

Lösning. De fjorton olika böckerna skall placeras i tre ettiketerade högar med respektive 3, 6 och 5 element. Antalet sätt detta går på ges av multinomialkoefficienten

$$\binom{14}{3,6,5}$$

vilken kan beräknas enligt nedan

$$\frac{14!}{3!\cdot 6!\cdot 5!} = \frac{14\cdot 13\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 14\cdot 13\cdot 11\cdot 3\cdot 4\cdot 7$$

vilket blir vårt svar.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Tio röda, tio blå och tio gröna men för övrigt identiska ballonger skall fördelas bland barnen Kajsa, Emanuel och August. På hur många olika sätt kan ballongerna fördelas.

OBS. Lösningen skall motiveras, och svaret skall ges i formen av produkter, och/eller summor, av hela tal.

Lösning. Antalet sätt att dela ut n identiska objekt till k olika personer ges av formeln

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

Multiplikationsprincipen ger nu, då

$$\binom{10+3-1}{3-1} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66$$

SVAR: $66 \cdot 66 \cdot 66$.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Bestäm antalet ord av längd 6 som man kan bilda med hjälp av bokstäverna a, b, c och d och som är sådana att var och en av de fyra bokstäverna a, b, c och d förekommer minst en gång i ordet, varvid bokstaven a förekommer precis en gång.
OBS. Lösningen skall motiveras, och svaret skall anges i formen av ett heltal. Ett korrekt svar som ges med symboler och beteckningar givna under lektioner och i läroboken ger minst 2p.

Lösning. Vi väljer först position åt a:et vilket kan ske på 6 olika sätt. Övriga fem positioner skall sen fördelas bland de tre återstående bokstäverna vilket kan ske på $\mathrm{S}(5,3)\cdot 3!$ olika sätt, eftersom varje bokstav skall uppträda i minst en position. Så

SVAR: $6\cdot \mathrm{S}(5,3)\cdot 3! = 6\cdot 25\cdot 6 = 900.$