Matematiska Institutionen,
KTH

Problem till övning nr 3 den 13 april, Diskret matematik CINTE, SF1610, vt 15.

1. (E) Visa med ett induktionsbevis att
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1},$$
för varje naturligt tal $n \geq 1$.

2. (D) Visa att $n^3 - n$ är delbart med 6 för varje positivt heltal n.

3. (C) Den oändliga talföljden a_0, a_1, ... definieras rekursivt genom
$$a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, \qquad \text{för} \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$
samt $a_0 = 2$ och $a_1 = 7$. Visa att $a_n = 3^n + 4^n$ för $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

4. (E) Bestäm antalet element i mängden $\{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2\}$.

5. (E) Betrakta mängderna
$$A = \{1, 2, 4, 8, 9, 11, 17\}, \qquad B = \{4, 5, 6, 8, 9\}, \qquad C = \{2, 4, 7, 9\}.$$
Bestäm
$$(A \cup B) \setminus (B \cap C)^{\sim},$$
där $X^{\sim}$ betecknar komplementet till mängden X.

6. (E) Mängden $\{\emptyset, \{0\}, \{0, \emptyset\}\}$ har åtta olika delmängder. Bestäm samtliga dessa delmängder.

7. (E) Låt $\mathcal{R}$ vara följande relation på mängden $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:
$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 3), (4, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$
Bestäm den ”minsta” ekvivalensrelation $\mathcal{S}$ som innehåller $\mathcal{R}$. Ange också de ekvivalensklasser som $\mathcal{S}$ inducerar på $\mathcal{M}$.

8. (E) Betrakta mängden $\mathcal{M} = \{0, 2, 5, 6, 8, 9, 11, 13\}$. Vi definerar en relation $\mathcal{R}$ på $\mathcal{M}$ genom $a\mathcal{R}b$ om talet 3 delar talet $a - b$. Visa att $\mathcal{R}$ definierar en ekvivalensrelation på $\mathcal{M}$ och bestäm de ekvivalensklasser som denna relation inducerar på $\mathcal{M}$.

9. (C) Låt f vara en funktion från A till B och låt g vara en funktion från B till C. Visa att om både f och g är bijektiva funktioner så är också sammansättningen $g \circ f$ en bijektiv funktion från A till C.

10. (C) Visa att unionen av två uppräkneligt oändliga mängder är en uppräknelig oändlig mängd.

11. (B) Antag att mängderna A_1, A_2, A_3, ... bildar en oändlig samling uppräkneligt oändliga mängder. Är unionen av sådana mängder en uppräkneligt oändlig mängd?

SVAR

1. –
2. –
3. –
4. 2.
5. $\{4, 9\}$
6. $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{0\}\}$, $\{\{0, \emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{0, \emptyset\}\}$, $\{\{0\}, \{0, \emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{0\}\}$, $\{\emptyset, \{0\}, \{0, \emptyset\}\}$,
7. Ekvivalensklasserna är $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2, 3\}$, $C_4 = \{4, 5, 6\}$.
8. Ekvivalensklasserna är $C_0 = \{0, 6, 9\}$, $C_2 = \{2, 5, 8, 11\}$, $C_{13} = \{13\}$.
9. –
10. –
11. –