Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning i Diskret Matematik för CINTE och CMETE, SF1610, tisdagen den 27 maj 2014, kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (**OBS:** Totalsumma poäng vid denna tentamensskrivning är 36p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Observera: Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

Var och en av nedanstående uppgifter svarar mot en kontrollskrivning. Godkänt resultat på en kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på motsvarande uppgift. Att lösa en uppgift som man på detta sätt redan har till godo ger inga extra poäng.

1. (3p) Bestäm samtliga lösningar i ringen Z_{102} till ekvationen

$$43x + 37 = 50.$$

2. (a) (1p) Tio indetiska objekt skall placeras i fem etiketterade lådor. På hur många olka sätt kan objekten fördelas i lådorna, om vi tillåter att lådor blir tomma? Svaret skall ges i formen av ett heltal.

   (b) (1p) Tio olika objekt skall placeras i fem etiketterade lådor med två objekt i varje låda. På hur många olika sätt kan detta ske? Svaret skall ges i formen av ett heltal.

   (c) (1p) Tio olika objekt skall placeras i fem oetiketterade lådor med två objekt i varje låda. På hur många olika sätt kan detta ske? Svaret skall ges i formen av ett heltal.

3. (3p) Gruppen G har en delgrupp H med 7 element och en delgrupp K med 5 element samt eventuellt också delgrupper av andra storlekar. Förklara varför antalet sidoklasser i G till delgruppen K är delbart med 7.

4. (a) (2p) Bestäm kontrollmatrisen (parity-checkmatrisen) till en 1-felsrättande kod C med 256 ord av minsta möjliga längd n.

   (b) (1p) Bestäm antalet ord av längd n som inte tillhör koden C ovan och ej heller kan rättas till ett ord i C.

5. (3p) I den planära och sammanhängande grafen G har alla noder valensen 3. Antalet kanter (inklusive eventuella multipelkanter) är 186. Bestäm antalet områden, ytterområdet medräknat, som uppstår vid en plan ritning av grafen.

DEL II

6. (3p) Den oändliga talföljden a_0, a_1, ... definieras rekursivt genom sambandet

$$a_n = -a_{n-1} + 4a_{n-2} - 4_{n-3}\,, \qquad \text{för} \qquad n = 3, 4, \ldots$$

samt av att $a_0 = 3$, $a_1 = -1$ och $a_2 = 9$. Visa med ett induktionsbevis att

$$a_n = (-1)^n + 2^n + (-2)^n$$

för $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

7. (4p) Bestäm antalet Booleska funktioner g i de fyra variablerna x, y, z och w, dvs $g = g(x, y, z, w)$, som satisfierar bägge ekvationerna i ekvationssystemet

$$\begin{cases} (x+y)z & + & g(x,y,z,w) & = & 1 \\ (z+w\bar{z})\bar{y} & + & g(x,y,z,w) & = & 1 \end{cases}$$

8. (4p) Sju flickor och åtta pojkar skall delas in i fyra grupper. På hur många sätt kan detta ske om varje grupp skall innehålla minst en flicka, och exakt en grupp skall sakna pojkar. Svaret får ges som summor och produkter av hela tal, (och lösningen skall motiveras).

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. (a) (1p) Förklara varför mängden av element i en cyklisk grupp G aldrig är en union av mängderna av element i en samling icketriviala delgrupper till G, dvs visa att

$$G \neq H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k,$$

för varje uppsättning icketriviala delgrupper $H_1, H_2 \ldots, H_k$ till G om G är en cyklisk grupp.

(b) (2p) Bevisa att ingen grupp G är en union av två icketriviala delgrupper H_1 och H_2 till G.

(c) (1p) Ange en grupp G som är en union av tre icketriviala delgrupper H_1, H_2 och H_3 till G.

(d) (1p) Finns det någon grupp G som är en union av fyra icketriviala delgrupper till G? Motivera ditt svar.

10. (5p) Låt $\mathcal{S}_n$ beteckna mängden av alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$. Låt $m(k)$ beteckna det minsta heltal m sådant att $\mathcal{S}_n$ har en permutation av ordning k för alla hela tal $n \geq m$. Härled en formel för antalet permutationer av ordning k i $\mathcal{S}_{m(k)}$.

(Kvaliteten hos dina motiveringar spelar stor roll vid poängbedömningen av denna uppgift.)