Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning i Diskret Matematik för CINTE och CMETE, SF1610, onsdagen den 20 augusti 2014, kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (**OBS:** Totalsumma poäng vid denna tentamensskrivning är 36p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Observera: Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

Var och en av nedanstående uppgifter svarar mot en kontrollskrivning. Godkänt resultat på kontrollskrivning nr. i under läsåret 2013-2014 ger automatiskt full poäng på uppgift nr. i. Att lösa en uppgift som man på detta sätt redan har till godo ger inga extra poäng.

1. (3p) Den oändliga talföljden a_0, a_1, a_2, ... definieras rekursivt genom sambandet

   $$a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}\,, \qquad \text{för} \qquad n = 2, 3, \ldots$$

   där $a_0 = 2$ och $a_1 = 2$. Visa med ett induktionsbevis att

   $$a_n = 4^n + (-2)^n$$

   för $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

2. (3p) På hur många olika sätt kan 13 röda bollar och 13 blå bollar fördelas bland fyra flickor och fyra pojkar så att varje pojke får minst en blå boll och varje flicka får minst en röd boll. (Svaret får skrivas som produkter, summor, skillnader och kvoter mellan hela tal.)

3. Betrakta gruppen $\mathcal{S}_7$ bestående av alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, 7\}$. Låt $\varphi = (1\ 2\ 4\ 5\ 6)$ och $\psi = (1\ 3\ 6\ 7)$.

   (a) (1p) Bestäm ordningen av permutationen $\varphi\psi$

   (b) (2p) För vilka positiva heltal n, m och k är permutationen $\varphi^n\psi^m\varphi^k$ en udda permutation?

4. (3p) Ett RSA-krypto har de offentliga nycklarna $n = 111$ och $e = 29$. Dekryptera meddelandet $b = 5$, (dvs bestäm $D(5)$).

5. (3p) Om exakt två av noderna i en graf G har udda valens (grad) så finns en stig mellan dessa två noder. Förklara varför.

DEL II

6. (3p) På hur många olika sätt kan de sju flickorna F_1, ..., F_7 och de sju pojkarna P_1, ..., P_7 delas in i fyra grupper, grupp 1, grupp 2, grupp 3 och grupp 4, så att varje grupp kommer att innehålla minst en flicka och minst en pojke. (Svaret skall skrivas som produkter, summor, skillnader och kvoter mellan hela tal.)

7. (a) (3p) Visa att i en abelsk (kommutativ) grupp $(G, \circ)$, med identitetselementet e, så gäller att mängden
$$H = \{g \in G \mid g \circ g \circ g \circ g = e\}$$
bildar en delgrupp till gruppen $(G, \circ)$.

   (b) (2p) Visa, t ex med hjälp av ett exempel, att detta inte alltid är sant om gruppen inte är abelsk (kommutativ).

8. (3p) Du får följande information om koden C: koden C är 1-felsrättande, antal ord i koden är $|C| = 16$, koden C är linjär (dvs om orden $\bar{c}$ och $\bar{c}'$ tillhör C så gäller att också ordet $\bar{c} + \bar{c}'$ tillhör C),
$$\{1111111, 1110000, 1001001, 0100011\} \subseteq C$$
Undersök om ordet 0111110 tillhör koden C eller om det kan rättas till ett ord i C, eller varken eller? (Bristfällig motivering ger poängavdrag).

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. (5p) En funktion f från mängden $\{0, 1, 2, \ldots, a\}$ till den direkta produkten
$$Z_b \times Z_c = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in Z_a,\ x_2 \in Z_b\}$$
av ringarna Z_b och Z_c definieras av
$$f(x) = (x(\text{mod } b), x(\text{mod } c)).$$
För vilka heltal $a > 1$, $b > 1$ och $c > 1$ gäller att funktionen f är injektiv, surjektiv och/eller bijektiv?

10. Grafen G består av två disjunkta nodmängder X och Y, och varje kant i G har sin ena ändpunkt i nodmängden X och den andra ändpunkten i nodmängden Y.

    (a) (3p) Visa att om alla noder i grafen G har valensen (graden) 3 så kan kanterna i G tilldelas värdena 0 eller 1 på ett sådant sätt att vid varje nod så kommer precis en kant med värdet 0 och två kanter med värdet 1 att inträffa.

    (b) (2p) Formulera och bevisa ett generellare påstående än det ovan angivna.