Matematiska Institutionen
KTH

Lösning uppgift 10 på övningstenta, SF1610

1. Vi visar att gruppen G_1 är cyklisk om G är cyklisk. Antag G genereras av elementet g och att $|G| = n$. Betrakta mängden
$$G_1 \times \{e\} = \{(g_1, e) \mid g_1 \in G_1\},$$
där e betecknar identiteten i G_2. Det är lätt att kontrollera att denna mängd bildar en delgrupp till G. Eftersom G gerereras av g, så gäller att
$$G_1 \times \{e\} = \{e = g^0, g_0 = g^{k_0}, g_1 = g^{k_1}, \ldots, g_t = g^{k_t}\},$$
där vi kan anta att
$$0 < k = k_0 < k_1 < \cdots < k_t < n. \qquad (1)$$
Vi dividerar nu k_i med k och får då att
$$k_i = d_i k + r_i$$
där $0 \leq r_i < k$. Men då $G_1 \times \{e\}$ är en delgrupp till G så finner vi att
$$g_i g_0^{-d} \in G_1 \times \{e\} \quad \Longrightarrow \quad g^{k_i} g^{-dk_0} \in G_1 \times \{e\} \quad \Longrightarrow \quad g^{r_i} \in G_1 \times \{e\}$$
vilket strider mot ekvation (1), såvida inte $r_i = 0$. Nu vet vi att samtliga exponenter $k_0, k_1, \ldots, k_t$ som uppträder i $G_1 \times \{e\}$ är multipler av k. Låt
$$g^k = (g_0', e) \qquad \text{där} \qquad g_0' \in G_1.$$
Låt g' vara ett godtyckligt element i G_1. Då finns en exponent k_i sådan att
$$(g', e) = g^{k_i} = g^{d_i k} = (g^k)^{d_i} = (g_0', e)^{d_i} = (g_0'^{d_i}, e).$$
Det godtyckligt valda elementet g' i G_1 är då lika med potensen $g_0'^{d_i}$ av g_0'. Därmed är G_1 cyklisk, generarad av g_0'. På samma sätt visas att G_2 är cyklisk.

2. Vi visar att om och endast om antalet element i de cykliska grupperna $G_1 = \langle g \rangle$ och $G_2 = \langle h \rangle$ är relativt prima så är $G_1 \times G_2$ cyklisk.

   Antag ordningen av g är n och ordningen av h är m, och därmed $|G_1| = n$ och $|G_2| = m$ (eftersom grupperna antages vara cykliska). Då gäller att $|G_1 \times G_2| = nm$.

   För ett godtyckligt element (g^i, h^j) i $G_1 \times G_2$ gäller att
$$(g^i, h^j)^{\mathrm{mgm}(n,m)} = ((g^{\mathrm{mgm}(n,m)})^i, (h^{\mathrm{mgm}(n,m)})^j) = (e^i, e^j) = (e, e).$$
Alla element i $G_1 \times G_2$ har alltså en ordning som är högst lika med $\mathrm{mgm}(n, m)$. Då
$$\mathrm{mgm}(n, m) = \frac{nm}{\mathrm{sgd}(n, m)},$$
så kan inte $G_1 \times G_2$ vara cyklisk om n och m inte är relativt prima, eftersom element av ordning nm saknas i så fall.

   Vi visar nu att om n och m är relativt prima så har elementet (g, h) ordning nm i $G_1 \times G_2$. Antag ordningen av (g, h) är s. Då gäller att $g^s = e$ och $h^s = e$ eftersom $(g^s, h^s) = (e, e)$. Vi delar s med n och får
$$s = kn + r$$
där $0 \leq r < n$. Som i föregående deluppgift kan vi då sluta att r måste vara lika med 0, dvs talen n delar talet s. På samma sätt finner vi att m delar s. Härur följer att $\mathrm{mgm}(n, m)$ delar s. Då
$$(g, h)^{\mathrm{mgm}(n,m)} = (e, e)$$
kan vi sluta att ordningen av (g, h) är $\mathrm{mgm}(n, m)$, och således lika med nm om n och m är relativt prima. Elementet (g, h) genererar då $G_1 \times G_2$, eftersom denna grupp har precis nm stycken element.