Skrivningskod: Glöm den inte!		**Om du vill:** Lägg till tre bokstäver.	

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösning till kontrollskrivning 5B, 14 oktober 2010, 10.45–11.45, i SF1610 Diskret matematik för CINTE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	En graf måste ha minst en nod med jämn valens.		x
b)	I varje sammanhängande planär graf är antalet kanter minst lika med antalet områden i en plan ritning av grafen, ytterområdet medräknat.	x	(x)
c)	Alla kompletta matchningar är maximala matchningar.	x	
d)	Antalet kanter i den kompletta grafen K_n är ett udda tal om n är ett jämnt tal.		x
e)	Om alla noder i graf G har jämn valens så har G säkert en Hamiltoncykel.		x
f)	En graf med 11111 stycken noder och 12345 stycken kanter måste ha minst en cykel.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Hur många noder har en graf med 20 kanter om varje nod har valensen 4.

SVAR: Om antalet noder är v blir summan av valenserna lika med $4v$ men valenssumman är ju lika med två gånger antalet kanter så

$$4v = 2 \cdot 20 \ ,$$

och alltså
SVAR: Antalet noder är 10.

b) (1p) Kan ett träd ha valenssekvensen 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5?

SVAR: Nej.

c) (1p) Formulera Halls bröllopssats.

SVAR: Se läroboken.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) I en planär sammanhängade graf har noderna valenssekvensen 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5. Bestäm antalet områden som uppstår vid en plan ritning av grafen, ytterområdet medräknat..

Lösning: Antalet kanter e är lika med hälften av summan av all valenser, dvs

$$e = \frac{1}{2}(3+3+3+3+3+4+4+4+4+5) = 18 \ ,$$

och antalet noder är 10 så enligt Eulers formel får vi

SVAR: $r = 18 + 2 - 10 = 10$.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Rita en graf med 12 noder och 18 kanter som både har en Eulerkrets och en Hamiltoncykel.

Lösning: Rita till exempel först en cykelgraf med 12 noder. Återstår nu 6 kanter att rita till. Gör detta t ex genom att rita 6 stycken loopar vid någon eller några noder (en idé som Johannes har bidragit med.) Alla noder har nu en jämn valens och därmed finns en Eulerkrets.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Bestäm det största antal noder en sammanhängande bipartit graf kan ha om antalet kanter i den bipartita grafen är 46.

Anmärkning: Det räcker med ett svar med en kortfattad motivering, så ett formellt korrekt bevis krävs inte för full poäng.

Lösning: En sammanhängade graf har alltid fler kanter än dess uppspännade träd. En sammanhängande graf med 46 kanter kan alltså ha högst 47 stycken noder. Om vi ritar en graf som består av en enda "linje" med en startnod och en slutnod har vi denna situation och färgar vi varannan nod svart och varannan nod vit uppstår en tudelning av grafen, med inga kanter mellan noder av samma färg.

SVAR: 47