KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösning till kontrollskrivning 5A, den 15 oktber 2013, kl 09.00-10.00
i SF1610 Diskret matematik för CINTE och CMETE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	Alla grafer som saknar cykler är träd.		x
b)	Varje komplett graf K_n med ett jämnt antal kanter har en Eulerkrets (sluten Eulerväg (Eulerpromenad)).		x
c)	I varje graf med v noder, e kanter och c komponenter gäller att $e > v - c - 1$.	x	
d)	Till varje matchning i en bipartit graf finns högst en alternerande stig.		x
e)	Om grafen G med n noder har en Hamiltoncykel så har G minst n stycken (upp-)spännde träd.	x	
f)	Den kompletta bipartita grafen $K_{2,n}$ är planär för alla heltal $n \geq 2$.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) En graf med 14 noder har fem noder med valens (grad) 2, fyra noder med valens 3, tre noder med 4 och två noder med valens 5. Ange antalet kanter i grafen.

(Svara bara.)

SVAR: 22.

b) (1p) Rita en graf med 10 kanter och 9 noder som har en Eulerkrets (Eulercykel, sluten Eulerväg) men saknar en Hamiltoncykel.

(Svara bara.)

SVAR: T ex två cykler som sitter ihop i en nod.

c) (1p) Betrakta tabellen

a	b	c	d	e	f	g	h	i
b	e	e	f	a	a	b	c	e
c	f	h	a	d	b	f	i	h

Komplettera tabellen ovan med så få bokstäver som möjligt så att tabellen blir en s k grannodtabell till en graf med noderna $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$. De noder som står under strecket i "x-kolumnen" i en grannodtabell är grannarna till noden x.

SVAR:

a	b	c	d	e	f	g	h	i
b	e	e	f	a	a	b	c	e
c	f	h	a	d	b	f	i	h
d	a	a	e	b	d			
e	g			c	g			
f				i				

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Låt G vara en bipartit graf med grannnodtabellen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(dvs G har noderna $1, 2, \ldots, 10$ och noden 1 har grannarna 2 och 10, noden 2 har grannarna 3 och 1 etc.) Bestäm en alternerande stig, som börjar och slutar i omatchade noder, till den matchning $\mathcal{M}$ som består av kanterna

$$\mathcal{M} = \{(1, 2), (5, 4), (7, 6), (9, 8)\}.$$

OBS. Lösningen skall motiveras.

SVAR: De båda stigarna $3-4-5-6-7-8-9-10$ och $3-2-1-10$ duger vardera som svar eftersom noderna 3 och 10 är omatchade, samt, varannan kant tillhör den givna matchningen $\mathcal{M}$.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Vilka möjligheter finns det för antalet kanter i en sammanhängande graf G om G har 21 stycken noder och saknar multipla (parallella) kanter och loopar. (En loop är en kant som har samma nod i sina ändpunkter, kallas ibland för en ögla.)
OBS. Ditt svar skall motiveras.

Lösning. Den kompletta grafen K_{21} på 21 noder har totalt $20 \cdot 21/2 = 210$ kanter, vilket är det maximala antalet kanter. Vi kan ta bort kanter, kant för kant från K_{21} utan att den blir osammanhängande ända tills det som återstår är ett uppspännande träd till K_{20}. Ett träd med 21 noder har 20 kanter. Alltså

SVAR: Det finns sammanhängade grafer med 21 noder och e stycken kanter för varje heltal e i intervallet $20 \leq e \leq 210$.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Undersök om det finns någon planär och sammanhängade graf, som saknar loopar (öglor) och multipla (parallella) kanter, som har 6 noder alla med en valens som är minst lika med 5.
OBS. Lösningen skall motiveras.

Lösning. Antal kanter i grafen skulle vara som minst lika med $6 \cdot 5/2 = 15$. Men en sats för planära grafer säger att i en planär graf gäller att $e \leq 3v - 6$ där e betecknar antalet kanter och v betecknar antalet noder. Men då

$$3 \cdot 6 - 6 = 12 < 15 = e$$

så kan grafen ifråga inte vara planär.