KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösning till kontrollskrivning 2A, den 25 september 2013, i SF1610 Diskret matematik för CINTE och CMETE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	Antalet sätt att placera n identiska objekt i k olika lådor är $\binom{n+k-1}{k-1}$.	x	
b)	Om $m > n$ så är $\binom{m}{k} > \binom{n}{k}$ för alla heltal k sådana att $1 \leq k \leq n$.	x	
c)	För alla hela tal n och k sådana att $1 \leq k < n$ gäller att Stirlingtalen $\mathrm{S}(n, k)$ och $\mathrm{S}(n, n-k)$ är lika.		x
d)	Om $\lvert A \cup B \cup C\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert + \lvert C\rvert - \lvert B \cap C\rvert - \lvert A \cap B\rvert$ så är $A \cap C = A \cap B \cap C$. ($A, B$ och C är mängder.)	x	
e)	Om $s > t > 0$ så är $\binom{n}{s} > \binom{n}{t}$ för alla heltal n sådana att $n \geq s$.		x
f)	För alla hela tal n, m, s, t sådana att $0 < s < n$ och $0 < t < m$ gäller att $\binom{n}{s}\binom{m}{t} \leq \binom{n+m}{s+t}$.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Ange det heltal som är lika med multinomialkoefficienten

$$\binom{8}{6,1,1}.$$

(Svara bara.)

SVAR: 56.

b) (1p) Du får reda på att Stirlingtalet $S(5,2)$ är lika med 15. Bestäm Stirlingtalet $S(6,2)$.

(Svara bara.)

SVAR: 31.

c) (1p) Ange det heltal som är lika med binomialkoefficienten

$$\binom{20}{18}.$$

(Svara bara.)

SVAR: 190.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Fem pojkar och fem flickor skall ställa sig i ett led med en pojke först och en flicka sist, och så att inga pojkar står direkt efter varandra, dvs enligt mönstret $PFPFPFPFPF$. Hur många olika sådana led kan bildas?
OBS. Lösningen skall motiveras, och svaret skall ges i formen av ett heltal.

Lösning. Det finns $5! = 120$ olika sätt att placera ut pojkarna på sina platser och lika många sätt för flickorna. Varje flickled kan kombineras med varje pojkled, varför vi får

SVAR: $120 \cdot 120 = 14400$

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) De femton barnen $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{15}$ skall delas in i den gula, röda och blåa gruppen, vardera med precis fem barn. På hur många olika sätt kan detta ske om barnet A_1 och barnet A_2 inte kan vara i samma grupp?
OBS. Lösningen skall motiveras, men svaret får innehålla symboler och beteckningar givna under lektioner och i läroboken.

Lösning. Vi låter först barnen A_1 och A_2 välja varsin grupp, ett val som kan ske på $3 \cdot 2 = 6$ olika sätt. Därefter fördelar vi de resterande 13 barnen på de tre grupperna, som har fyra, fyra resp. fem platser över. Eftersom grupperna är "etiketterade" så kan denna sistnämnda fördelning ske på $\binom{13}{4,4,5}$ olika sätt.
Multiplikationsprincipen ger nu

SVAR:

$$6 \cdot \binom{13}{4, 4, 5}.$$

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Bestäm antalet sätt att fördela sju olika böcker bland tre barn så att inget barn blir utan bok.

OBS. Lösningen skall motiveras, men svaret får innehålla symboler och beteckningar givna under lektioner och i läroboken.

Lösning. Vi delar först in böckerna i tre icketomma högar vilket kan ske på $\mathrm{S}(7,3)$ olika sätt. Som andra operation låter vi de tre barnen i tur och ordning välja en hög med böcker, som inte redan är vald. Detta kan ske på $3!$ olika sätt. Multiplikationsprincipen ger då

SVAR: $3! \cdot \mathrm{S}(7,3)$.