Skrivningskod: Glöm den inte!		**Om du vill:** Lägg till tre bokstäver.	

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösning till kontrollskrivning 2A, 20 september 2010, 10.45–11.45, i SF1610 Diskret matematik för CINTE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	falskt
a)	$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k$.	x	
b)	För $n \geq 1$ gäller alltid att $\binom{n}{n-1} = n$.	x	
c)	För alla hela tal k, med $0 < k < n$, så delar k talet $n!$.	x	
d)	Till varje jämnt tal n finns tal $k \neq k'$ så att $\binom{n}{k} = \binom{n}{k'}$.	x	
e)	För alla naturliga tal $n \geq 1$ och $k \geq 2$ gäller för Stirlingtalet $S(n,k)$ att $S(n,k) > S(n, k-1)$.		x
f)	Antalet delmängder med tre element till en mängd med $n > 5$ element kan vara ett primtal.		x

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Ange värdet av

$$\binom{10}{7,2,1}.$$

(Obs svaret skall ges i formen av ett heltal.)

SVAR: 360

b) (1p) På hur många olika sätt kan fyra flickor och tre pojkar ställa sig i ett led av typen FPFPFPF, dvs varannat barn i ledet är en flicka. (Obs svaret skall ges i formen av ett heltal.)

SVAR: 144

c) (1p) Ange antalet sätt att dela in en mängd med 5 element i tre icketomma delmängder.

SVAR: 25

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Bestäm antalet hela tal n i intervallet $1 \leq n \leq 360$ som inte delas av något av talen 3, 4 eller 5.

Lösning: Använder principen om inklusion exklusion.

Låt A vara mängden av tal delbara med 3, B mängden av tal delbara med 4 och C mängden av tal delbara med 5. Då gäller att svaret ges av uttrycket

$$360 - |A \cup B \cup C| \ .$$

Vi beräknar

$$\begin{array}{rcl} |A| & = & \frac{360}{3} = 120 \\ |B| & = & \frac{360}{4} = 90 \\ |A| & = & \frac{360}{5} = 72 \\ |A| & = & \frac{360}{12} = 30 \\ |A| & = & \frac{360}{15} = 24 \\ |A| & = & \frac{360}{20} = 18 \\ |A| & = & \frac{360}{60} = 6 \end{array}$$

Principen om inklusion exklusion ger nu

SVAR:

$$360 - (120 + 90 + 72) + (30 + 24 + 18) - 6 = 144 \ .$$

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) En klass med 11 flickor och 12 pojkar skall utse en grupp bestående av tre flickor och fyra pojkar. Hur många olika sådana grupper kan man bilda om det är så att om pojken A väljs så måste flickan B också vara med.

(Svaret får innehålla ett uttryck som går att beräkna med hjälp av de fyra "räknesätten".)

Lösning: Vi delar in i fall beroende på pojken A:s deltagande.

Fall 1: Pojken A är med, och därmed också flickan B. Återstår att välja ytterligare två flickar utav 10 och tre pojkar utav 11, vilket enligt multiplikationsprincipen går på

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{11}{3} = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{2 \cdot 3} \ .$$

olika sätt.

Fall 2: Pojken A är inte med. Återstår att välja ytterligare tre flickar utav 11 och fyra pojkar utav 11, vilket enligt multiplikationsprincipen går på

$$\binom{11}{3} \cdot \binom{11}{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{2 \cdot 3} \cdot \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

olika sätt.

Totala antalet möjligheter blir då

SVAR:

$$\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{2 \cdot 3} + \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{2 \cdot 3} \cdot \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Elementen $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ skall delas in i fyra delmängder, av vilka en får vara tom. På hur många sätt kan detta ske om följande två krav båda skall vara uppfyllda:

Krav 1: Elementen 1, 2 och 3 skall tillhöra olika mängder.

Krav 2: Elementen 6 får inte tillhöra samma mängder som elementen 3 och 4 tillhör.

(Svaret får innehålla ett uttryck som går att beräkna med hjälp av de fyra "räknesätten".)

Lösning: Vi delar in i två fall:

Fall 1: Elementen 3 och 4 tillhör samma mängd.

Op 1. Lägg elementen 1, 2, och 3 i varsina mängder. Antal sätt detta går på är $n_1 = 1$.

Op 2. Placera ut elementet 4 i den delmängd som elementet 3 tillhör: $n_2 = 1$.

Op 3. Placera ut elementet 6. Det finns tre möjliga delmängder att välja bland. $n_3 = 3$.

Op 4 För vart och ett av de övriga tre elementen är antalet möjligheter 4 så antal sätt att placera ut dessa på är $n_4 = 4^3$.

Totalt rymmer detta fall $3 \cdot 4^3$ möjligheter.

Fall 2: Elementen 3 och 4 tillhör olika mängder.

Op 1. Lägg elementen 1, 2, och 3 i varsina mängder. Antal sätt detta går på är $n_1 = 1$.

Op 2. Placera ut elementet 4 i annan delmängd än den elementet 3 tillhör: $n_2 = 3$.

Op 3. Placera ut elementet 6. Det finns två möjliga delmängder att välja bland. $n_3 = 2$.

Op 4 För vart och ett av de övriga tre elementen är antalet möjligheter 4 så antal sätt att placera ut dessa på är $n_4 = 4^3$.

Totalt rymmer detta fall $3 \cdot 2 \cdot 4^3$ möjligheter.

Således

SVAR: $3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 2 \cdot 4^3$