Skrivningskod: Glöm den inte!		**Om du vill:** Lägg till tre bokstäver.	

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösning till kontrollskrivning 2A, 21 september 2010, 15.45–16.45, i SF1610 Diskret matematik för CINTE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

	sant	**falskt**
a) Det gäller alltid att $(n+m)! = n! + m!$		x
b) För alla naturliga tal $n \geq 1$ och $k \geq 1$ gäller för Stirlingtalet $S(n,k)$ att $S(n,k) \geq 2$.		x
c) För alla naturliga tal n och k med $1 \leq k \leq n-1$ så är $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ett heltal.	x	
d) Om $\vert A \cup B \cup C\vert = \vert A\vert + \vert B\vert + \vert C\vert - \vert A\cap B\vert - \vert A \cap C\vert - \vert B \cap C\vert$ så är $A \cap B \cap C = \emptyset$.	x	
e) $\binom{987}{986} = 986$.		x
f) Det finns ett naturligt tal $n \geq 4$ sådant att $\binom{n}{3} = \binom{n-1}{2}$.		x

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Ange värdet av

$$\binom{7}{2,2,3} .$$

(Obs svaret skall ges i formen av ett heltal.)

Svar (med lösning):

$$\binom{7}{2,2,3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 .$$

b) (1p) Ange värdet av Stirlingtalet $S(6,2)$. Hjälpinformation $S(4,2) = 7$.

Svar (med lösning): Då $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$ så
$S(6,2) = S(5,1) + 2S(5,2) = 1 + 2(S(4,1) + 2S(4,2)) = 1 + 2(1 + 2 \cdot 7) = 31$.

c) (1p) Ange koefficienten framför termen x^5 i utvecklingen av polynomet

$$(3+x)^7 .$$

(Det räcker att svara med ett uttryck som går att beräkna med hjälp av de fyra ”räknesätten”.)

Svar (med lösning): Använder binomialsatsen

$$(3+x)^7 = 3^7 + \binom{7}{1} 3^6 x^1 + \binom{7}{2} 3^5 x^2 + \cdots + \binom{7}{5} 3^2 x^5 + \binom{7}{6} 3^1 x^6 + x^7 .$$

Vi får, då $\binom{7}{5} = \binom{7}{2}$
SVAR:

$$\frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot 9 .$$

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Bestäm antalet delmängder med 7 element till mängden

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} ,$$

som innehåller precis ett av elementen 1, 2 och 3. Svaret skall ges i form av ett heltal samt motiveras.

Lösning: Först väljer vi ett av elementen 1, 2 och 3. Det finns tre olika möjligheter för detta så $n_1 = 3$.

Sen skall vi välja sex av elementen i mängden $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ vilket kan göras på $n_2 = \binom{8}{6}$ olika sätt.

Multiplikationsprincipen ger nu

SVAR:

$$3 \cdot \binom{8}{6} = 3 \cdot \binom{8}{2} = 3 \cdot \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 84 .$$

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Hur många olika ord av längd 7 kan man bilda med hjälp av bokstäverna A, B, C, D, E, F och G om ordet inte får innehålla något av delorden DEG, BAD och EG. Till exempel är BFAEDCG ett tillåtet ord men inte ADEGBCF.

Observera att var och en av bokstäverna A, B, C, D, E, F och G skall förekomma precis en gång i ordet.

(Svaret får innehålla ett uttryck som går att beräkna med hjälp av de fyra "räknesätten".)

Lösning: Vi använder principen om inklusion exklusion. Totalt finns 7! olika ord. Låt X beteckna de ord som innehåller ordet DEG som delord, Y mängden av ord som innehåller delordet BAD och Z mängden ord som innehåller delordet EG.

Vi finner att

$|X| = 5!$ då vi kan låta kombinationen DEG representera en av fem enheter, dvs A, B, C, DEG, F som skall kombineras till ord.

P.s.s

$|Y| = 5!$ och $|Z| = 6!$.

Vidare

$|X \cap Y| = 3!$ ty vi skall kombinera BADEG, C och F, $|X \cap Z| = 5!$ eftersom enheterna DEG, A, B, C och F skall kombineras samt $|Y \cap Z| = 4!$ eftersom vi skall kombinera enheterna EG, BAD, C och F.

Tillslut har vi att $|X \cap Y \cap Z| = 3!$ eftersom likaledes enherna BADEG, C och F skall kombineras.

Så

SVAR: $7! - (5! + 5! + 6!) + (3! + 5! + 4!) - 3!$

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Elementen $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ skall delas in i fyra icketomma delmängder. På hur många sätt kan detta ske om följande två krav båda skall vara uppfyllda:

Krav 1: Elementen 1, 2, 3, 4 skall tillhöra olika mängder.

Krav 2: Elementen 1 och 5 får inte tillhöra samma mängd, och elementet 6 får inte tillhöra samma mängder som elementen 3 och 4 tillhör.

(Svaret får innehålla ett uttryck som går att beräkna med hjälp av de fyra "räknesätten".)

Lösning: Först lägger vi ut elementen 1, 2, 3 och 4 i olika mängder, vilket kan göras på ett sätt eftersom mängderna inte är etiketterade från början, så $n_1 = 1$. För elementet 5 finns nu tre olika mängder att välja på, så $n_2 = 3$, för elementet 6 finns två val, $n_3 = 2$ samt för elementen 7 och 8 vardera två val, dvs $n_4 = n_5 = 4$.

Multiplikationsprincipen ger nu

SVAR: $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 96$.