KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösningar till kontrollskrivning 1A,
i SF1610 Diskret matematik för CINTE och CMETE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \dots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	En Diofantisk ekvation $xa + yb = p$ där p är ett primtal är lösbar om och endast om $\text{sgd}(a, b) = p$.		x
b)	Om p är ett primtal och a ett heltal så gäller antingen att $\text{mgm}(a, p) = pa$, eller $\text{mgm}(a, p) = a$	x	
c)	Det finns en relation $\mathcal{R}$ på en mängd $\mathcal{M}$ sådana att $\mathcal{R}$ varken är reflexiv, symmetrisk eller transitiv.	x	
d)	Om $A \cap B = A \cup B$ så måste både A och B vara den tomma mängden.		x
e)	De rationella talen är en uppräkneligt oändlig mängd.	x	
f)	Om $ab = 0$ i en ring $\mathbb{Z}_n$ så kan varken a eller b vara (multiplikativt) inverterbara i ringen $\mathbb{Z}_n$.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Bestäm $59^{7473} \pmod{30}$.
(Svara bara.)

SVAR: 29

b) (1p) Antag att $\text{sgd}(a, b) = 2$. Vilka värden kan då $\text{sgd}(a^4, b^6)$ anta?
(Svara bara.)

SVAR: 16 eller 64.

c) (1p) På mängden $M = \{0, 1, 3, 6, 8, 10, 11, 13\}$ definieras en ekvivalensrelation $\mathcal{R}$ genom $a\mathcal{R}b$ om talet fem delar $a - b$. Ange de ekvivalensklasser som denna ekvivalensrelation inducerar på mängden M.
(Svara bara.)

SVAR: $C_0 = \{0, 10\},\ C_3 = \{3, 8, 13\},\ \ C_1 = \{1, 6, 11\}$.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Lös ekvationen $22x + 16 = 10$ i ringen $\mathbb{Z}_{29}$.
OBS. En komplett lösning skall ges.

Lösning. Givna ekvationen är ekvivalent med ekvationen $22x = 10 - 16$, dvs $22x = -6$.

Vi bestämmer nu inversen till 22 i ringen $\mathbb{Z}_{29}$ med hjälp av Euklides algoritm:

$$\begin{array}{rcrcl} 29 & = & 22 & + & 7 \\ 22 & = & 3 \cdot 7 & + & 1 \end{array}$$

varur vi finner att

$$1 = 22 - 3 \cdot 7 = 22 - 3(29 - 22) = 4 \cdot 22 - 3 \cdot 29.$$

Detta samband ger att $22 \cdot 4 = 1$ i ringen $\mathbb{Z}_{29}$.

Vi återvänder till den givna ekvationen och får

$$22x = -6 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 4(-6) = -24 = 5.$$

SVAR: 5.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) En talföljd $a_0, a_1, ...$ definieras rekursivt genom att $a_0 = 4$ och

$$a_n = 3a_{n-1} - 2n + 3,$$

för $n = 1, 2, \ldots$. Ge ett induktionsbevis för att $a_n = 4 \cdot 3^n + n$.
OBS. Endast induktionsbevis ger poäng.

Lösning. Sätt $b_n = 4 \cdot 3^n + n$. Vi skall visa att $a_n = b_n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

I. Vi ser att $a_0 = 4 = 4 \cdot 3^0 + 0 = b_0$.

II. Vi visar nu implikationen $a_{n-1} = b_{n-1} \implies a_n = b_n$. För den skull antar vi nu att n är ett tal för vilket $a_{n-1} = b_{n-1}$. Då gäller att

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} - 2n + 3 = 3b_{n-1} - 2n + 3 = 3(4 \cdot 3^{n-1} + (n-1)) - 2n + 3 = \\ &= 3 \cdot 4^n + n, \end{aligned}$$

dvs

$$a_n = b_n$$

III. Enligt induktionsprincipen gäller nu att $a_n = b_n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Bestäm antalet element x i ringen $\mathbb{Z}_{128}$ som är sådana att $96x = 0$, när man räknar i ringen $\mathbb{Z}_{128}$.
OBS. En komplett lösning skall ges.

Lösning. Att $96x = 0$ i den givna ringen är ekvivalent med att x är ett naturligt tal mellan 0 och 128 sådant att

$$96x = 128k$$

för något heltal k. Vi förenklar ekvationen genom att dela med 32 i vänstra och högra ledet och får då den ekvivalenta ekvationen

$$3x = 4k.$$

Enligt aritmetikens fundamentalsats gäller då att 4 delar x. Varje multipel

$$x = 4n,$$

där n är ett heltal ger också en lösning $(x, k) = (4n, 3n)$.

I $\mathbb{Z}_{128}$ har vi således att x löser den givna ekvationen precis då

$$x \in \{x = 4n \mid n = 0, 1, 2, \ldots, 124/4 - 1\}$$

Denna mängd innehåller 32 element så

SVAR: 32.