KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösningar till kontrollskrivning 1B, onsdagen 12 september 2012, 10.45–11.45, i SF1610 Diskret matematik för CINTE och CMETE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

	sant	**falskt**
a) För alla hela tal n och m skilda från 0 gäller att $\text{sgd}(n, m) = \text{sgd}(m, n)$.	x	
b) Varje element $a \neq 0$ i ringen Z_{87} har en multiplikativ invers.		x
c) Om mängderna A och B har samma antal element så är varje injektiv funktion från A till B också surjektiv.	x	(x)
d) Om n och m är relativt prima så är den diofantiska ekvationen $nx + my = k$ lösbar för alla hela tal k.	x	
e) Det finns $a \neq 0$ och $b \neq 0$ i ringen Z_{63} sådana att $ab = 0$.	x	
f) För alla mängder A, B och C gäller att $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) = \emptyset$	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Låt $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Är följande relation $\mathcal{R}$ på M en ekvivalensrelation:

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 3)\}.$$

SVAR: Nej

b) (1p) Låt $A = \{1, 3, 7, 10, 12\}$, $B = \{1, 2, 8, 9, 10, 11\}$ och $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 10\}$. Bestäm de element som finns i mängden

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus (B \cap C)).$$

(Ett svar räcker, motivering behövs ej.)

SVAR: $\{1, 3, 7, 12\}$

c) (1p) Ange $603^{478} \pmod{301}$. (Ett svar räcker, motivering behövs ej.)

SVAR: 1

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Lös ekvationen $4x + 5 = 8$ i ringen Z_{13}.

Lösning:

$$4x + 5 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 8 - 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 3$$

Multiplicerar med 3, som är inverterbar i den givna ringen, och vi får då en ekvivalent ekvation nämligen

$$12 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad -x = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = -9$$

SVAR: $x = 4$.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Bestäm samtliga par (n, m) av hela tal n och m som satisfierar ekvationen

$$46n + 64m = 4.$$

Lösning Division med 2 ger den ekvivalenta ekvationen

$$23n + 32m = 2.$$

Euklides algoritm ger

$$32 = 23 + 9, \quad 23 = 3 \cdot 9 - 4, \quad 9 = 2 \cdot 4 + 1$$

varur

$$1 = 9-2\cdot 4 = 9-2(3\cdot 9-23) = -5\cdot 9+2\cdot 23 = -5(32-23)+2\cdot 23 = 7\cdot 23-5\cdot 32.$$

Multiplicerar med 2

$$14 \cdot 23 - 10 \cdot 32 = 2.$$

Eftersom talen 23 och 32 är relativt prima får vi nu den allmänna lösningen, se tex läroboken,

SVAR: $n = 14 + 32k$ och $m = -10 - 23k$.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Visa med hjälp av ett induktionsbevis att om talföljden a_n defineras rekursivt genom att $a_0 = 4$ och $a_1 = -1$ samt

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \qquad \text{då} \qquad n = 2, 3, 4, ...$$

så kommer $a_n = 2^n + 3(-1)^n$ för alla $n = 0, 1, 2, ...$

Lösning: Låt $b_n = 2^n + 3(-1)^n$. Vi skall visa att den rekursivt definierade talföljden a_n överensstämmer med talföljden b_n. Använder ett induktionsbevis för detta:

I. Det gäller att $a_0 = 4 = 2^0 + 3(-1)^0 = b_0$ och $a_1 = -1 = 2^1 + 3(-1)^1 = b_1$.

II. Visar att om $a_{n-1} = b_{n-1}$ och $a_{n-2} = b_{n-2}$ så $a_n = b_n$.
Vet att

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

som om $a_{n-1} = b_{n-1}$ och $a_{n-2} = b_{n-2}$ är lika med

$$a_n = b_{n-1} + 2b_{n-2} = 2^{n-1} + 3(-1)^{n-1} + 2(2^{n-2} + 3(-1)^{n-2}) =$$
$$= 2 \cdot 2^{n-2} - 3(-1)^{n-2} + 2 \cdot 2^{n-2} + 6(-1)^{n-2} = 4 \cdot 2^{n-2} + 3(-1)^{n-2} =$$
$$= 2^n + 3(-1)^n = b_n.$$

III. Enligt induktionsprincipen är nu $a_n = b_n$ för $n = 0, 1, 2, ...$.