Skrivningskod: Glöm den inte!		**Om du vill:** Lägg till tre bokstäver.	

KTH Matematik

Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösningar till kontrollskrivning 1A, ons 17 september 2007, 09.15–10.15, i SF1610 Diskret matematik för IT2.

Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)**–**f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	falskt
a)	$5^4 \equiv 5 \pmod 2$.	x	
b)	Om p är ett primtal sådant att p delar talet a så är $sgd(a, p) = p$. (OBS $sgd(x, y) = gcd(x, y)$)	x	
c)	Elementet 4 är inverterbart i ringen Z_6.		x
d)	Ingen symmetrisk relation på en mängd kan vara anti-symmetrisk.		x
e)	Det finns en surjektiv funktion från de hela talen till de naturliga talen.	x	
f)	$A \cap B = A \cup B \quad \Rightarrow \quad A = B$.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Låt $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 11\}$, $B = \{3, 2, 5, 7, 11, 12\}$ och $C = \{1, 6, 7, 8\}$. Ange elementen i mängden $((A \setminus C) \cup (B \setminus C)) \cap (A \cup B)$

LÖSNING: $A \setminus C = \{3, 5, 11\}$ och $B \setminus C = \{3, 2, 5, 11, 12\}$ och alltså är

$$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \{2, 3, 5, 11, 12\}.$$

Då $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 12\}$ får vi nu att

$$((A \setminus C) \cup (B \setminus C)) \cap (A \cup B) = \{2, 3, 5, 11, 12\}.$$

b) (1p) Ange ett element x i ringen Z_9 sådant att $2x = 5$.

LÖSNING: Vi bestämmer en invers till elementet 2 i ringen Z_9 genom typ gissningen att $2 \cdot 5 \equiv 1 \pmod 9$ och alltså att $2^{-1} = 5$. Multiplicerar nu bägge leden i ekvationen med detta element och får

$$x = 2^{-1} \cdot 2x = 2^{-1} \cdot 5 = 5 \cdot 5 = 7.$$

SVAR: 7.

c) (1p) Ange, på valfritt sätt, två olika bijektiva funktioner från $A = \{1, 2, 3, 4\}$ till $B = \{A, B, C, D\}$.

LÖSNING: $f(1) = A, f(2) = B, f(3) = C, f(4) = D$ resp $g(1) = A, g(2) = B, g(3) = D, g(4) = C$.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Bestäm den största gemensamma delaren till talen 439 och 513.

LÖSNING: Euklides algoritm ger

$$\begin{aligned} 513 &= 1 \cdot 439 + 74 \\ 439 &= 6 \cdot 74 - 5 \\ 74 &= 15 \cdot 5 - 1 \\ 5 &= 5 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

den sista ickeförsvinnande resten i algoritmen är 1 och därmed

SVAR: 1.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Relationen R definierad genom att aRb om 7 delar $a - b$ är en ekvivalensrelation på mängden $\{1, 5, 9, 11, 15, 17, 19\}$. Detta behöver du inte visa utan det enda som krävs för full poäng på uppgiften är att du anger de ekvivalensklasser som denna relation ger upphov till.

LÖSNING: Ekvivalensklassen C_n besår av de element i mängden som är ekvivalenta med elementet n, dvs

$$C_n = \{x \mid xRn\} = \{x \mid 7|(x - n)\}.$$

Okular besiktning ger nu ekvivalensklasserna (tag ett element i taget och bestäm samtliga element i mängden som är ekvivalenta med elementet):

$$\begin{aligned} C_1 &= \{1, 15\} \\ C_5 &= \{5, 19\} \\ C_9 &= \{9\} \\ C_{11} &= \{11\} \\ C_{17} &= \{17\} \end{aligned}$$

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Visa på valfritt sätt att $14^n - 1$ är delbart med 13 för varje naturligt tal $n \geq 1$.

LÖSNING: Vi visar att $14^n - 1 \equiv 0 \pmod{13}$ för alla naturliga tal n:

$$14^n - 1 \equiv_{13} 1^n - 1 \equiv_{13} 1 - 1 \equiv_{13} 0.$$