Matematiska Institutionen,
KTH

Extra övningsproblem till del 1, Diskret matematik, SF1610, ht 13.

1. Skriv i 3-systemet det tal som i 4-systemet skrivs $(3021)_4$.
2. Bestäm samtliga talpar (x, y) sådana att
$$34x + 15y = 2$$
där $-40 \leq x \leq 0$ och $0 \leq y \leq 70$
3. Bestäm tre olika positiva hela tal a, b och c sådana att produkten av $\mathrm{sgd}(a, b, c)$ och $\mathrm{mgm}(a, b, c)$ inte är lika med produkten av talen a, b och c, dvs
$$\mathrm{sgd}(a, b, c) \cdot \mathrm{mgm}(a, b, c) \neq abc.$$
4. Visa att om talföljden a_0, a_1, ... definieras rekursivt genom
$$a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2},$$
för $n = 2, 3, \ldots$ samt att $a_0 = 2$ och $a_1 = 3$ så gäller att $a_n = 5^n + (-2)^n$ för alla naturliga tal.
5. Visa att för varje natrurligt tal $n \geq 2$ gäller att talet 6 delar talet $n^3 - n$.
6. Låt $\mathbb{Z}$ beteckna de hela talen dvs $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ och låt $\mathbb{N}$ beteckna de naturliga talen dvs $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
   (a) Bestäm en surjektiv funktion f från $\mathbb{N}$ till $\mathbb{Z}$ sådan att f inte är injektiv.
   (b) Bestäm en injektiv funktion g från $\mathbb{Z}$ till $\mathbb{N}$ sådan att g inte är surjektiv.
7. Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på mängden $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12\}$ genom $a\mathcal{R}b$ om $a-b$ är delbart med 4. Visa att $\mathcal{R}$ då är en ekvivalensrelation på $\mathcal{M}$ och bestäm samtliga ekvivalensklasser.
8. Bestäm $42^{54} (\mathrm{mod}\ \ 39)$.
9. Bestäm samtliga lösningar i $\mathbb{Z}_{11}$ till ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}.$$
10. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $x^2 - 2x + 3 = 0$ i ringarna $\mathbb{Z}_{11}$ resp $\mathbb{Z}_{12}$.
11. Visa att för varje primtal $p \geq 5$ gäller att talet 24 delar talet $p^2 - 1$.

SVAR

1. $(21110)_3$.
2. $(x, y) = (-11, 25)$ eller $(-26, 59)$.
3. Till exempel $a = 2$, $b = 4$ och $c = 8$.
4. –
5. –
6. (a) Till exempel $f(0) = f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = -1$, $f(4) = 2$, $f(5) = -2$, ...
   (b) Till exempel $g(0) = 1$, $g(1) = 2$, $g(-1) = 3$, $g(2) = 4$, $g(-2) = 5$, ...
7. Ekvivalensklasserna är $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2, 6\}$, $C_3 = \{3, 7, 11\}$, $C_4 = \{4, 8, 12\}$.
8. 27.
9. Ekvationssystemet har de elva olika lösningarna $(x, y, z) = t(1, 2, -1)$ där $t \in \mathbb{Z}_{11}$.
10. Ekvationen saknar lösningar i ringen $\mathbb{Z}_{12}$. I ringen $\mathbb{Z}_{11}$ har vi lösningarna $x = 1 \pm 3$, dvs $x = 4$ eller $x = 9$.
11. –