Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning i Diskret Matematik för CINTE och CMETE, SF1610 och 5B1118, tisdagen den 7 januari 2014, kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (**OBS:** Totalsumma poäng vid denna tentamensskrivning är 37p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Observera: Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

Var och en av nedanstående uppgifter svarar mot en kontrollskrivning. Godkänt resultat på en kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på motsvarande uppgift. Att lösa en uppgift som man på detta sätt redan har till godo ger inga extra poäng.

1. (a) (1p) Lös ekvationen $3x + 5 = 7$ i ringen Z_8.

   (b) (2p) Bestäm $17^{84} (\text{mod } 43)$.

2. (3p) Bestäm antalet ord av längd 10 som man kan bilda med hjälp av de 10 bokstäverna a, a, a, a, b, b, b, c, c, c.

   OBS. Lösningen skall förutom motiveringar innehålla ett svar som ges som ett naturligt tal, dvs ett av talen 1, 2, 3, ...

3. (3p) Gruppen $G = (Z_{187}, +)$ har precis fyra olika delgrupper. Bestäm dessa.

4. (a) (2p) Fyll i de element som fattas i matrisen **H** nedan, och som gör matrisen till en kontrollmatris (parity-checkmatris) till en 1-felsrättande kod C.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} & & 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & 0 & \end{pmatrix}$$

   (b) (1p) Bestäm ett binärt ord av längd 7 som inte ligger i C men som kan rättas till ett ord i C.

5. (a) (1p) Förklara varför en bipartit graf med ett udda antal kanter aldrig kan ha en Eulerkrets, dvs en sluten Eulerväg.

   (b) (1p) För vilka naturliga tal n existerar en graf, utan loopar och multipla kanter, med valenssekvensen 1, 2, 3, ..., n.

   (c) (1p) Varje skog har fler noder än kanter. Gäller omvändningen, dvs är varje graf med fler noder än kanter en skog?

DEL II

6. (4p) Visa att $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ är delbart med 12.

7. En skolklass med 14 barn, och som har lika många pojkar som flickor, skall delas in i två grupper med minst en pojke i varje grupp, och minst två flickor i varje grupp.

   (a) (2p) På hur många olika sätt kan denna gruppindelning ske om grupperna är lika stora?

   (b) (2p) På hur många olika sätt kan denna gruppindelningen ske om storleken på grupperna inte är specificerad.

   OBS. Svaret skall ges i formen av ett naturligt tal, dvs som ett av talen 1,2,3, ...

8. (4p) Låt φ beteckna permutationen

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

   av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, 7\}$. Undersök om det finns någon permutation ψ sådan att $\psi\varphi\psi = \varphi^2$.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. Låt $\mathcal{S}_n$ beteckna gruppen som består av alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$.

   (a) (1p) Bestäm en cyklisk delgrupp med 6 element till $\mathcal{S}_{10}$.

   (b) (1p) Visa att det finns en cyklisk delgupp med 21 element till $\mathcal{S}_{10}$.

   (c) (3p) *Uppgiften utgick pga konstig formulering.*

10. (5p) En ST-relation $\mathcal{R}$ på en mängd M är en relation som är symmetrisk och transitiv. Varje ekvivalensrelation på en mängd M är alltså en ST-relation, men varje ST-relation är inte en ekvivalensrelation. Diskutera likheter och skillnader mellan ekvivalensrelationer och ST-relationer. Bestäm också antalet ST-relationer på mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ och undersök om det finns någon ST-relation $\mathcal{R}$ på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sådan att $|\mathcal{R}| = 15$.