KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösning till kontrollskrivning 3B, den 2 oktber 2013, kl 11.00-12.00 i SF1610 Diskret matematik för CINTE och CMETE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	En grupp med 42 element kan ha en delgrupp med 8 element.		x
b)	I varje grupp $(G, \circ)$ gäller den kommutativa lagen, dvs $a \circ b = b \circ a$ för alla $a, b \in G$.		x
c)	Alla permutationer av ordning $p > 2$, där p är ett primtal, är jämna permutationer.	x	
d)	En icke-trivial delgrupp H till en grupp $(G, \circ)$ kan själv ha en eller flera icke-triviala delgrupper.	x	
e)	Mängden av alla permutationer av elementen i en mängd med minst 3 element bildar en grupp som är cyklisk.		x
f)	Varje icke-cyklisk grupp $(G, \circ)$ har minst en icke-trivial delgrupp H.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Låt φ vara den permutation av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, 9\}$ som skriven som en produkt av disjunkta cykler uttrycks

$$\varphi = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)\,(5\ \ 6)\,(7\ \ 8\ \ 9).$$

Är φ en udda eller en jämn permutation.
(Svara bara.)

SVAR: Jämn.

b) (1p) Ange en sidoklass $a+H$ till en delgrupp H med fem element, ($|H| = 5$,) till gruppen $(\mathbb{Z}_{25}, +)$ sådan att sidoklassen $a + H$ innehåller elementet 4.
(Svara bara.)

SVAR: $\{4, 9, 14, 19, 24\}$.

c) (1p) Nedanstående tabell kan fyllas i så att det blir multiplikationstabellen till en grupp. Fyll i tabellen så den blir komplett.

SVAR:

$\circ$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	f	d	c	b
b	b	d	e	f	a	c
c	c	f	d	e	b	a
d	d	b	c	a	f	e
f	f	c	a	b	e	d

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Låt φ, ψ och γ vara nedanstående permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, \dots, 5\}$, (φ, ψ och γ är skrivna som produkt av disjunkta cykler)

$$\varphi = (1\ \ 3\ \ 4\ \ 5), \qquad \psi = (2\ \ 5\ \ 3)\,(1\ \ 4), \qquad \gamma = (1\ \ 3)\,(2\ \ 5).$$

Bestäm ordningen av permutationen $\varphi \circ \psi \circ \gamma$.
OBS. Lösningen skall motiveras och kalkyler redovisas.

Lösning. Vi finner att t ex

$$\varphi \circ \psi \circ \gamma(1) = \varphi(\psi(\gamma(1))) = \varphi(\psi(3)) = \varphi(2) = 2.$$

Räkningar enligt ovan ger då

$$\varphi \circ \psi \circ \gamma = (1\ \ 2\ \ 4\ \ 3\ \ 5)$$

Eftersom ordningen är minsta gemensamma multipeln av cykellängderna, när permutationen är skriven som en produkt av disjunkta cykler, har vi

SVAR: $\mathrm{mgm}(5) = 5$.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Elementen $\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$ i ringen $\mathbb{Z}_{16}$ bildar under operationen multiplikation i $\mathbb{Z}_{16}$ en grupp G. (T ex så är $5 \cdot 7 = 3$.) Bestäm två olika delgrupper H_1 och H_2 till G, som båda har fyra element, (dvs $H_1 \neq H_2$ och $|H_1| = |H_2| = 4$).
OBS. Lösningen skall motiveras.

Lösning. Vi söker delgrupper bland de cykliska delgrupperna, så "trial and error" ger

$$H_1 = \langle 3 \rangle = \{3, 3^2, 3^2, 3^4 = 1\} = \{3, 9, 11, 1\},$$

och

$$H_2 = \langle 5 \rangle = \{5, 5^2, 5^2, 5^4 = 1\} = \{5, 9, 13, 1\},$$

vilket blir vårt svar.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Gruppen G är cyklisk och genereras av elementet a vars ordning är 88. Bestäm samtliga element g i G sådana att $g^5 = g^{12}$.
OBS. Lösningen skall motiveras.

Lösning. Vi multiplicerar med inversen till g fem gånger och får att

$$g^{-5}g^5 = g^{-5}g^{12}, \qquad \text{dvs} \qquad g^7 = e,$$

där e betecknar identitetselementet i G. Eftersom G är cyklisk genererad av elementet a har vi att $g = a^k$ för något heltal $0 \leq k \leq 87$. Likheten för g, som vi fann ovan, kan då skrivas

$$(a^k)^7 = e.$$

Men om $a^s = e$ så måste s vara en multipel av 88. Vi kan alltså sluta att $7k = 88n$, för något heltal n. Talet 7 delar då n och det finns ett heltal t sådant att $n = 7t$, och därmed $k = 88t$. Tillbaka till g finner vi då

$$g = a^k = (a^{88})^t = e^t = e.$$

SVAR: g är identitetselementet.