Skrivningskod: Glöm den inte!		**Om du vill:** Lägg till tre bokstäver.	

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösning till kontrollskrivning 3B, 28 september 2010, 15.45–16.45, i SF1610 Diskret matematik för CINTE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)**–**f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	Om en delgrupp H till en grupp G består av fyra element så består också varje sidoklass till H av fyra olika element.	x	
b)	Låt e beteckna identiteten i en grupp G. Det kan finnas tre olika element $a, b, c \in G$ så att $ab = e$ och $ca = e$		x
c)	Varje cyklisk grupp har precis en generator		x
d)	Om g genererar den cykliska gruppen G så genererar g^2 en delgrupp till G	x	
e)	Varje grupp G med 19 element har inga andra delgrupper än de triviala delgrupperna $H = \{e\}$ och $K = G$.	x	
f)	Om φ är en udda permutation så är $\varphi \circ \varphi$ en jämn permutation.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Skriv permutationen definierad genom tablån

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

som en produkt av disjunkta cykler.

SVAR: (1 3 2 4)(5 6)

b) (1p) Fyll i nedanstående tabell så att den blir en multiplikationstabell till en grupp.

$\circ$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c		b	e
b	b		a	e	c
c	c	b		d	
d	d		c		

SVAR:

$\circ$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c	d	b	e
b	b	d	a	e	c
c	c	b	e	d	a
d	d	e	c	a	b

c) (1p) Skriv permutationen (1 3 2 5)(1 4 2) som en produkt av 2-cykler.

SVAR: (1 5)(1 2)(1 3)(1 2)(1 4)

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Låt G beteckna gruppen $(Z_{20}, +)$. Ange en delgrupp H till G som innehåller elementet 5 men inte innehåller elementet 2.

SVAR: $< 5 >= \{0, 5, 10, 15\}$

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Undersök om mängden av inverterbara element i ringen Z_{14} utgör en cyklisk grupp med avseende på multiplikationen i Z_{14}.
(**Hjälp:** de inverterbara elementen är 1, 3, 5, 9, 11, 13.)

LÖSNING: De inverterbara elementen i en ring bildar alltid en grupp så det räcker att undersöka om det finns något element g som genererar gruppen, dvs om

$$< g >= \{g, g^2, g^3, g^4, g^5, g^6 = 1\} = \{1, 3, 5, 9, 11, 13\} = G \;.$$

Vi testar elementet 3 och finnar att varken $3^1 = 3$, $3^2 = 9$ eller $3^3 = 13$ är lika med identiteten. Alltså kan ordningen av elementet 3 varken vara 1, 2 eller 3 och måste då vara lika med 6, eftersom ett elements ordning alltid delar antalet element i gruppen.

Elementet $g = 3$ har ordning 6 och kommer att generera en cyklisk delgrupp med 6 element till givna gruppen G med 6 element, och alltså måste $< 3 >= G$.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Låt $\gamma = (1\ 2\ 5)(4\ 3)$. Bestäm en permutation ψ sådan att

$$\gamma^{13}\psi = \gamma^{10}\ .$$

Vi ser att γ har ordning 6 och då blir $\gamma^{13} = \gamma^6 \cdot \gamma^6 \cdot \gamma = \gamma$ och vår ekvation kan förenklas till

$$\gamma\psi = \gamma^{10}\ ,$$

eller efter multiplikation med γ^{-1} till

$$\psi = \gamma^9 = (\gamma^3)^3\ .$$

Men $\gamma^3 = (4\ 3)$ så

$$\psi = (4\ 3)(4\ 3)(4\ 3) = (4\ 3)\ .$$