

**KTH Matematik**  
Olof Heden

$\Sigma$ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

**Kontrollskrivning 3A, 26 september 2012, 10.45–11.45,  
i SF1610 Diskret matematik för CINTE och CMETE.**

Inga hjälpmedel tillåtna.

Minst 8 poäng ger godkänt.

Godkänd ks  $n$  medför godkänd uppgift  $n$  vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år),  $n = 1, \dots, 5$ .

13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.

**Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.**

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

**Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!**

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar  $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar  $-\frac{1}{2}$ p.

Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

**Kryssa för om påståendena a)–f) är sanna eller falska (eller avstå!)**

	sant	falskt
a) Om $G$ är en grupp med 17 element så gäller för varje element $g \in G$ att $g^{18} = g$ .	x	
b) Varje grupp med 17 element är en cyklisk grupp.	x	
c) I varje grupp gäller kommutativa lagen dvs att $a \circ b = b \circ a$ för alla element $a$ och $b$ i gruppen.		x
d) Det finns minst en grupp som har precis tre olika delgrupper	x	
e) Det finns element vars ordning är 17 i gruppen $\mathcal{S}_8$ , dvs mängden av permutationer av en mängd med 8 element		x
f) Mängden $\{\text{id.}, (1\ 2), (1\ 3)\}$ utgör en delgrupp till gruppen $\mathcal{S}_3$ som består av alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, 3\}$ .		x

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

**2a)** (1p) Ange samtliga sidoklasser i gruppen  $G = (Z_{18}, +)$  till den delgrupp  $H$  till  $G$  som består av elementen  $\{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$ .

**SVAR:**

Sidoklasserna är  $\{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$ ,  $\{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$ ,  $\{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$

**b)** (1p) Nedanstående ej kompletta multiplikationstabell kan kompletteras till en multiplikationstabell till en grupp med elementen  $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ . Gör det!

$\circ$	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$
$a$	$a$	$e$	$f$	$d$	$c$	$b$
$b$	$b$	$d$	$e$	$f$	$a$	$c$
$c$	$c$	$f$	$d$	$e$	$b$	$a$
$d$	$d$	$b$	$c$	$a$	$f$	$e$
$f$	$f$	$c$	$a$	$b$	$e$	$d$

**c)** (1p) Låt  $\mathcal{S}_8$  beteckna samma grupp som i uppgift 1e. Låt  $\gamma$  vara den permutation som i cykelnotation skrivs  $\gamma = (1\ 2\ 5)(3\ 7\ 8\ 6)$ . Låt  $\alpha$  vara permutationen  $\alpha = \gamma^{-1} \circ \gamma \circ \gamma^{-1}$ . Skriv  $\alpha$  i tablåform.

**SVAR:**

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 6 & 4 & 2 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Namn	poäng uppg.3

**3)** (3p) Låt  $\varphi$  och  $\psi$  nedan vara permutationer, skrivna i tablåform, av elementen i mängden  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Bestäm ordningen av permutationerna  $\varphi \circ \psi$  och  $\psi \circ \varphi$ . Lösningen skall motiveras.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

**Lösning:** Vi skriver permutationerna i fråga som en produkt av disjunkta cykler:

$$\varphi \circ \psi = (1\ 3\ 5\ 2)(4\ 6)$$

vars ordning är 4, resp

$$\psi \circ \varphi = (1\ 3\ 2\ 4)(6\ 5)$$

som också har ordning 4.

**SVAR:** Båda har ordning 4.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Bestäm samtliga cykliska delgrupper till gruppen  $(Z_9, +)$ . (Obs elementen i var och en av delgrupperna skall anges, det räcker alltså inte enbart att ange generatorerna för delgrupperna.) Lösningen skall motiveras.

**Lösning:**

$$\langle 0 \rangle = \{0\},$$

$$\langle 1 \rangle = \{1, 1+1=2, 1+1+1=3, \dots, 8, 0\} = (Z_9, +)$$

$$\langle 3 \rangle = \{3, 3+3=6, 3+3+3=0\}$$

Då  $1 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$  så  $1 \in \langle 2 \rangle$  och alltså  $(Z_9, +) = \langle 1 \rangle \subseteq \langle 2 \rangle$  och enda möjligheten är att  $\langle 2 \rangle = (Z_9, +)$ .

etc. Vi hittar precis tre olika cykliska delgrupper

**SVAR:**  $\{1, 1+1=2, 1+1+1=3, \dots, 8, 0\}$ ,  $\{3, 6, 0\}$  och  $\{0\}$ .

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Bestäm samtliga delgrupper  $H$  till gruppen  $G = (Z_{24}, +)$  till vilka det finns en sidoklass  $a + H$  som bl a innehåller elementen 3 och 7 (men som kan innehålla fler element). Lösningen skall motiveras.

**Lösning:** Elementet 0 tillhör  $H$  och 3 tillhör då sidoklassen  $3 + H$ . För att 7 skall tillhöra denna sidoklass måste elementet 4 också tillhöra  $H$ , och omvänt, alla delgrupper  $H$  som innehåller elementet 3 kommer att ha en sidoklass  $3 + H$  som innehåller både 3 och 7.

Slutsatsen blir att det är de delgrupper som innehåller delgruppen  $\langle 4 \rangle$  har den sökta egenskapen. Antag  $\langle 3 \rangle \subseteq H \subseteq G$ . Eftersom  $\langle 4 \rangle = \{4, 8, 12, \dots, 20, 0\}$  har 6 element och  $G$  har 24 element så skall 6 dela  $|H|$  och  $|H|$  dela 24. Enda möjliga sådana  $|H|$  är 6, 12 resp 24, dvs  $H = \langle 4 \rangle$ ,  $H = \langle 2 \rangle$  eller  $H = G$ .

**SVAR:**  $(Z_{24}, +)$ ,  $\langle 2 \rangle$  eller  $\langle 4 \rangle$ .