Skrivningskod: Glöm den inte!

Om du vill: Lägg till tre bokstäver.

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösning till kontrollskrivning 1B, måndagen 13 september 2011, i SF1610 Diskret matematik för CINTE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \dots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	$(111111)_2 = (63)_{10}$.	x	
b)	$17^8 \equiv 2^8 \pmod 5$.	x	
c)	Mängden av alla primtal är en uppräkneligt oändlig mängd.	x	
d)	I alla ringar Z_n, där $n \geq 3$, är elementet $n-2$ inverterbart.		x
e)	Om A och B är olika mängder så är alltid $A \setminus B \neq B \setminus A$.	x	
f)	Om $\text{sgd}(a,b) = 1$, $\text{sgd}(b,c) = 1$ och $a \neq c$ så är alltid $\text{sgd}(a,c) = 1$.		x

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Ange en lösning i ringen Z_{13} till ekvationen $7x + 6 = 1$.

SVAR: 3

b) (1p) Låt $A = \{\emptyset, 0, \{\emptyset\}\}$. Skriv upp samtliga delmängder till A.

SVAR: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{0\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, 0\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{0, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, 0, \{\emptyset\}\}$

c) (1p) Låt N beteckna mängden av naturliga tal och låt A beteckna mängden av udda hela tal. Beskriv en bijektion mellan mängderna N och A. (Beskrivningen behöver inte vara formell, ett tydligt diagram räcker. Du kan anta att 0 är ett naturligt tal.).

T ex

$$\varphi(n) = \begin{cases} n + 1 & \text{för} \quad n = 0, 2, 4, \ldots \\ -n & \text{för} \quad n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Bestäm samtliga lösningar till den diofantiska ekvationen

$$315x + 244y = 1 \ .$$

Lösning: Euklides algoritm ger

$$\begin{aligned} 315 &= 244 + 71 \\ 244 &= 3 \cdot 71 + 31 \\ 71 &= 2 \cdot 31 + 9 \\ 31 &= 3 \cdot 9 + 4 \\ 9 &= 2 \cdot 4 + 1 \end{aligned}$$

Ur räkningarna ovan härleder vi att

$$\begin{aligned} 1 &= 9 - 2 \cdot 4 = 9 - 2(31 - 3 \cdot 9) = \\ &= 7 \cdot 9 - 2 \cdot 31 = 7 \cdot (71 - 2 \cdot 31) - 2 \cdot 31 = \\ &= 7 \cdot 71 - 16 \cdot 31 = 7 \cdot 71 - 16(244 - 3 \cdot 71) = \\ &= 55 \cdot 71 - 16 \cdot 244 = 55(315 - 244) - 16 \cdot 244 = \\ &= 55 \cdot 315 - 71 \cdot 244 \end{aligned}$$

En lösning är alltså $x = 55$ och $y = -71$. Eftersom talen 315 och 244 visade sig vara relativt prima får vi, enligt lösningsformel i läroboken

SVAR: $x = 55 + k \cdot 244$ och $y = -71 - k \cdot 315$ där $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Bestäm $358^{1001}(\text{mod } 15)$.

Lösning: Då $358 \equiv (-2) \pmod{15}$, samt $(-2)^4 \equiv 1 \pmod{15}$ så har vi att

$$358^{1001} \equiv_{15} (-2)^{1001} \equiv_{15} ((-2)^4)^{250}(-2) \equiv_{15} 1^{250}(-2) \equiv_{15} -2 \equiv_{15} 13 \ .$$

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Betrakta talföljden $b_n = 2^n + 2 \cdot 4^n$, definierad för $n = 0, 1, 2, \ldots$, samt den talföljd a_n som rekursivt definieras genom rekursionen

$$a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} \qquad n = 2, 3, \ldots$$

och med begynnelsevärdena $a_0 = 3$ och $a_1 = 10$. Visa att dessa talföljder är lika, dvs att $a_n = b_n$ för $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Lösning: I Vi konstaterar att $a_1 = b_1$ och $a_0 = b_0$.

II Vi visar att $a_k = b_k$ för $k \leq n-1$ medför att $a_n = b_n$. Den rekursiva formeln ger då att

$$a_n = 6b_{n-1} - 8b_{n-2} = 6(2^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-1}) - 8(2^{n-2} + 2 \cdot 4^{n-2}) =$$
$$= 12 \cdot 2^{n-2} - 8 \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot 24 \cdot 4^{n-2} - 2 \cdot 8 \cdot 4^{n-2} = 4 \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot 16 \cdot 4^{n-2} =$$
$$= 2^n + 2 \cdot 4^n = b_n \ .$$

III Enligt induktionsprincipen gäller nu att $a_n = b_n$ för $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.